LA MATEMÁTICA SUPERIOR Y SU ENSEÑANZA EN EL CICLO SUPERIOR DE LA SECUNDARIA

El ciclo Superior de la Secundaria representa para los jóvenes la oportunidad de profundizar contenidos matemáticos anteriores, analizarlos desde el punto de vista formal de la matemática como ciencia, al mismo tiempo que se abre un espacio de construcción de nuevos conceptos.

La matemática para jóvenes que cursan estudios secundarios superiores deberá aportar niveles crecientes de formalización y generalización.

Para "hacer matemática" es ineludible resolver problemas, pero si bien esta actividad es necesaria no resulta suficiente. La descontextualización de los resultados obtenidos es lo que permite generalizar y realizar transferencias pertinentes.

Es importante que los docentes tengan presente que si bien la estructura de la matemática, como ciencia formal, es el resultado final de conocimientos construidos por la comunidad científica, en la escuela secundaria esa estructura deberá constituir una meta y no un punto de partida.

Si bien la "matemática escolar" difiere del trabajo científico, el estilo y las características de la tarea que realiza la comunidad matemática pueden y deben vivenciarse en el aula. De esta forma los alumnos considerarán a la Matemática como un quehacer posible para todos, tal como se esbozara en la Secundaria Básica.

El imaginario popular asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones tienen su origen, en gran parte, en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad. Por lo general la matemática escolar ha estado caracterizada por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, demostraciones formales junto con un uso apresurado de la simbología. Esto ha contribuido a la creencia de que las personas que no son capaces de asimilarlos sistemáticamente, en el orden y la cantidad en la que son presentados, fracasan por "falta de capacidad" para la matemática.

Esta concepción determinista y elitista de la Matemática se contrapone con la propuesta de este diseño curricular que la coloca como parte de la cultura y a nuestros alumnos como hacedores de la misma.

Si bien la Matemática es un quehacer posible para todos, el modo en la que se la presenta no siempre resulta adecuado para todos. Por este motivo se propone un cambio sustancial en el quehacer matemático del aula donde el docente a partir de la asimetría sea un motor importante en la construcción de conocimientos que cobren sentido dentro de la formación integral del alumno. Uno de estos cambios es el posicionamiento del docente, corriéndose del lugar central que ha ocupado históricamente dentro del aula. "Abandonar el lugar central" no significa "abandonar a los alumnos" sino ocupar otro espacio dentro de la dinámica de la clase que permita a los jóvenes interactuar con sus pares y con la propuesta de trabajo presentada. Pero la sola reunión de los jóvenes con propuestas bien planificadas no garantiza que aprendan matemática. La intervención del docente es de fundamental importancia para que el aprendizaje sea posible, pero esa intervención debe responder a estrategias que trasciendan la exposición como única dinámica de clase.

MAPA CURRICULAR MATEMÀTICA SUPERIOR SEXTO AÑO

Eje	Núcleos sintéticos de contenidos
Geometría y álgebra	**Ecuación vectorial de la recta** **Noción de fractal**
Número y operaciones	**Números Complejos** Concepto. Operaciones en C **Series** Concepto. Notación y lenguaje Uso de calculadoras
Álgebra y funciones	**Funciones trigonométricas** **Concepto de límite** En el infinito En un punto Continuidad **Derivada.** Derivada en un punto Función derivada **Estudio completo de funciones sencillas.** **Integrales** Uso de software para el estudio de funciones

Probabilidad y Estadística	**Distribución Binomial** **Distribución Normal** Uso de calculadoras

CARGA HORARIA

La materia **Matemática Superior** se encuentra en el 6° año de la escuela secundaria en todas las orientaciones del Ciclo Superior.
Su carga es de 144 horas totales, siendo su frecuencia de 4 horas semanales si su duración se implementa como anual.

OBJETIVOS DE ENSEÑANZA

- Promover el trabajo autónomo de los alumnos.
- Estimular a los alumnos a establecer hipótesis, comprobarlas y validarlas utilizando herramientas matemáticas pertinentes.
- Valorar y hacer valorar a los alumnos los aportes individuales y /o grupales a la construcción del conocimiento matemático logrado por la clase de matemática en su conjunto
- Promover el respeto por las opiniones ajenas y una actitud abierta al cambio que permita elegir las mejores soluciones a diferentes problemas matemáticos, estableciendo, cuando resulte necesario, puntos de encuentro con los desarrollos personales o logrados en pequeños grupos.
- Utilizar la información que brindan las evaluaciones realizadas para retroalimentar tanto las planificación particular como la institucional en matemática
- Alentar a los alumnos para que valoren sus producciones matemáticas y logren comunicarlas en pequeños grupos o en grupo total, para realizar consultas, defender posturas, construir hipótesis o tratar de explicar construcciones matemáticas personales o ajenas.

- Planificar las diferentes instancias en las que se desarrollará el trabajo matemático (individual, en parejas, en pequeños grupos, en grupo total u otras) que promuevan el trabajo personal y grupal
- Evaluar los aprendizajes de los alumnos estableciendo relaciones entre lo aprendido y lo enseñado en las clases de matemática
- Valorar y aprovechar los conocimientos matemáticos extraescolares que los alumnos hayan podido construir para formalizarlos en el marco de la matemática con el objeto de explicarlos, enriquecer su significado.
- Colaborar para que los alumnos utilicen libros de matemática como material de consulta, ampliación de lo trabajado en clase.
- Ayudar a los alumnos a tomar conciencia de que la construcción grupal de conocimientos matemáticos aporta aprendizajes valiosos.
- Escuchar, registrar y retomar los aportes de sus alumnos efectuados en forma individual y grupal durante la clase de matemática.
- Promover la relación por parte del alumno de los contenidos nuevos con los anteriores.
- Estimular la necesidad de mejorar la terminología y notación matemática en los diferentes contenidos.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Construir conocimientos matemáticos significativos.
- Elaborar estrategias de trabajo matemático en el aula en un marco de responsabilidad, solidaridad y convivencia democrática.
- Establecer transferencias pertinentes de los conocimientos adquiridos a situaciones intra y/o extra-matemáticas.
- Trabajar de manera autónoma identificando posibles modelizaciones de situaciones que se presenten en diferentes campos.
- Valorar la Matemática como objeto de la cultura.
- Comprender la importancia de la formalización como herramienta de comunicación en el ámbito de la Matemática.
- Distinguir definiciones de explicaciones y ejemplos.
- Justificar estrategias.

- Comprobar lo razonable de sus resultados.
- Valorar su propia capacidad matemática.

CONTENIDOS

Los contenidos se han organizado en cuatro ejes: Geometría y álgebra, Números y Operaciones, Álgebra y Estudio de Funciones, Probabilidades y Estadística, en los mismos se incluyen núcleos sintéticos de contenidos que agrupan conocimientos que están vinculados entre sí.

En cada uno de los ejes se continuará con el trabajo propuesto en diseños anteriores, profundizándolo y orientándolo hacia los niveles de argumentación y formalización que se espera que los alumnos adquieran a lo largo de los tres años que componen la Secundaria Superior. En el mencionado desarrollo se incluyen contenidos nuevos que complementan y refuerzan la formación básica de los alumnos.

El orden de presentación de los ejes, y de los núcleos sintéticos dentro de los mismos no implica que el docente deba, necesariamente, enseñarlos en ese orden si consigna en su planificación razones justificadas.

El tratamiento de los contenidos de determinado eje puede provocar la aparición de un nodo en el que se encuentran contenidos de otros ejes.

La descripción de los contenidos de cada eje contiene orientaciones didácticas. Estas orientaciones incluyen ejemplos de problemas y situaciones de enseñanza con los que el docente podrá trabajar algunos de los contenidos del eje.

Desarrollo de contenidos

Geometría
Ecuación vectorial de la recta

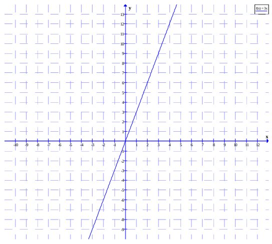
Los alumnos ya profundizaron las funciones lineales y pueden graficar la recta que viene dada por la función $f(x) = m x + b$. Por otra parte ya han trabajado con vectores tanto en los contenidos de matemática de años anteriores como en otras disciplinas. Sin embargo, es conveniente antes de abordar el tema, revisar las operaciones entre vectores (suma, multiplicación por un escalar) en forma gráfica y algebraicamente así como también el significado gráfico del crecimiento constante que se trabajó en función lineal.

Analizar en forma particular la ecuación de las rectas verticales.

Se trata en este contexto que vinculen estas miradas de la recta.

Ejemplo 1

El siguiente es el gráfico de f(x)= 3x



- ¿Se podría caracterizar a los puntos de la recta de la siguiente forma?

"Los puntos de la recta son los puntos del plano cuya segunda coordenada es el triple de la primera"

Simbólicamente:

L_1 son los (x, y) de $\Re^2$ / (x, y) = (x, 3x) para todo $x \in \Re$

o bien (x, y) = α (1, 3) con $\alpha \in \Re$

- ¿El punto (1/3, 1) está en la recta?¿ y el (-4, -8)? Justificar
- Determinar k para que el punto (k, 3/5) esté en la recta.
- ¿Cómo caracterizarías los puntos de la recta que es gráfico de la función lineal f(x)= 2/3 x?
- ¿Cómo caracterizarías los puntos de la recta vertical qué pasa por el punto A= (3, 7)?

Ejemplo 2

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P= (2, 9) y Q= (3, 7)? ¿ y el vector dirección?

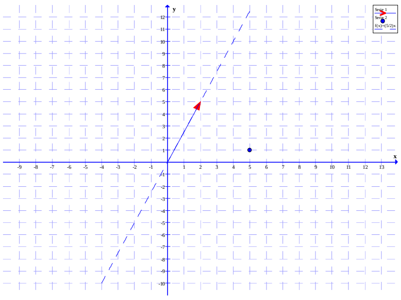
Ejemplo: 3

Analiza mediante gráficos la siguiente expresión:

Si el punto P está en la recta L_1 : (x, y) = α (2, 5) entonces el punto

Q = P +(5, 1) está en la recta L_2 que tiene dirección v = (2, 5) y pasa por el punto

(5, 1)



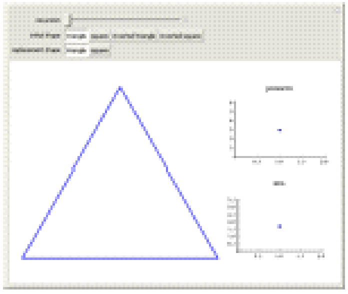
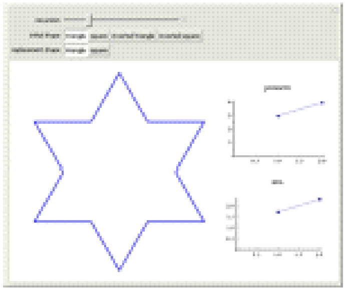
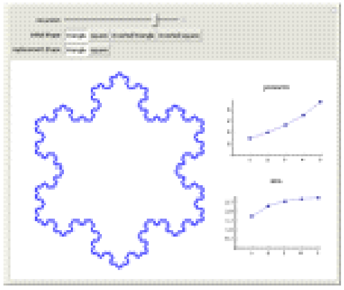
- Escribir la ecuación de L_2

Noción de fractal

Se abordará la *noción* de fractal que posee modelos matemáticos donde los alumnos verán contenidos trabajados a largo de su escolaridad aplicado con ciertas particularidades como geometría, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales y noción de límite de sucesiones. Los fractales también modelizan objetos que exhiben una estructura a muchos niveles de escala y se utilizan en la gráfica computarizada que en ciertos casos describen formas complicadas de la naturaleza. Helge Koch mostró una curva con perímetro infinito que encierra una región del plano de área finita que es una figura con forma de copo de nieve.

Ejemplo 1
Las siguientes imágenes de la curva corresponden a simulaciones que los alumnos pueden consultar en la web[1],donde hay también otros sitios con abundante información sobre el tema

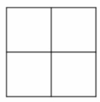
1 http://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html

Su perímetro en cada paso se multiplica por 4/3.
Esta figura es *autosimilar* ya que si se transforman dos segmentos cualesquiera de las varias aproximaciones , por ejemplo un lado del triángulo original y un lado de los triángulos obtenidos en el primer paso, se obtiene la misma curva al límite sólo que en escala diferente.

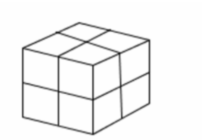
El grado de *autosemejanza* puede medirse.

El cuadrado es una figura autosimilar de dimensión 2 ya que se obtiene uniendo 4 partes de tamaño ½.



Se unen 2^2 partes de tamaño 1/2

El cubo es de dimensión 3 ya que se obtiene con uniendo 8 partes de tamaño 1/2



Se unen 2^3 partes de tamaño 1/2

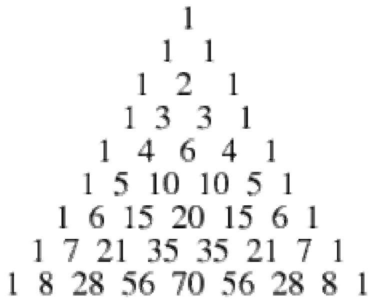
Una figura de dimensión *d* es la que se obtiene uniendo $\mathbf{n^d}$ partes de tamaño **1/n**

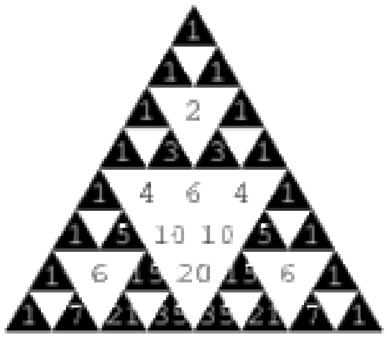
El cuadrado es una figura autosimilar en la que se unen $2^{\mathbf{2}}$ partes de tamaño **1/2.**
El cubo es una figura autosimilar en la que se unen $2^{\mathbf{3}}$ partes de tamaño **1/2.**
Como en la curva de Koch se unen 4 partes de tamaño 1/3, ya que se divide el segmento en tres partes y se sustituye la parte central por partes iguales, su dimensión d será
$\mathbf{4 = 3^d}$ parte
$\mathbf{d} = \frac{\log 4}{\log 3}$ =1,26..
Estas figuras con dimensión no entera son los fractales.

Ejemplo 2

La carpeta de Sierpinski es un fractal descripto por él en 1915, puede obtenerse por un proceso recursivo considerando un triángulo equilátero, dividiéndolo en 4 triángulos semejantes, sustrayendo uno en el centro y repitiendo el proceso al infinito, su área tenderá a 0. Su dimensión es $d = \frac{\log 3}{\log 4}$ aproximadamente 1,58

Pintando de negro los números impares y de blanco los pares en el triángulo de Pascal se obtiene la carpeta de Sierpinski.

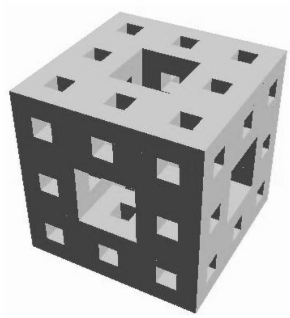




Ejemplo 3

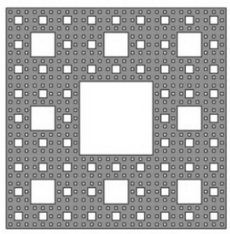
La carpeta de Sierpinski puede generalizarse en tres dimensiones con la esponja de Menger.

La esponja de Menger[2] puede obtenerse por un proceso recursivo considerando un cubo, dividiéndolo en 27 cubos, sustrayendo 6 cubos en las caras y uno en el interior yrepitiendo el proceso al infinito tenderá a un volumen 0.



Su dimensión es aproximadamente 2,72.

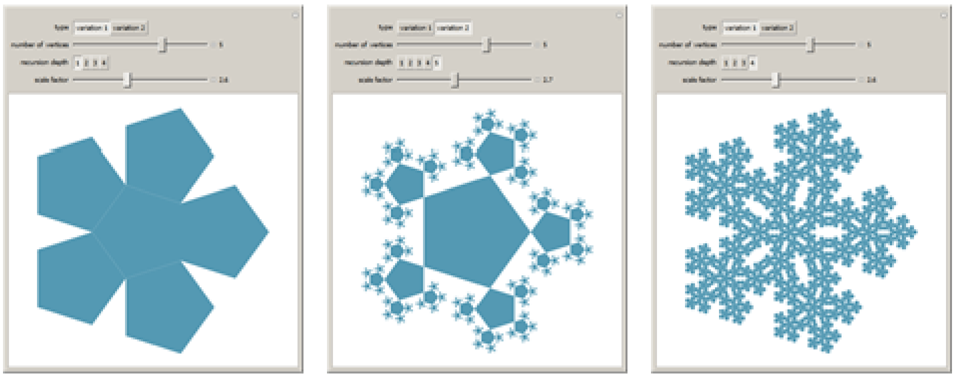
En realidad cada cara de la esponja de Menger es una carpeta de Sierpinski.



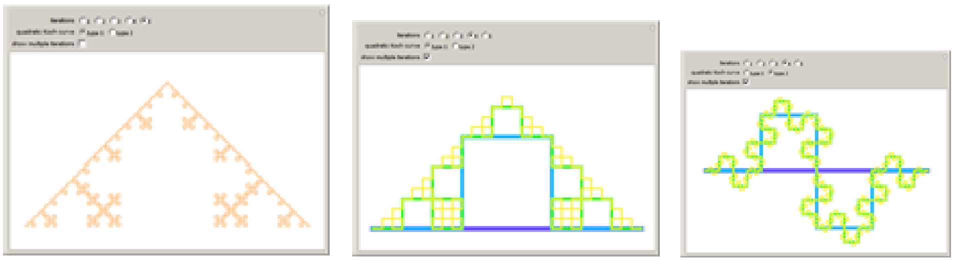
Ejemplo 4

[2] http://demonstrations.wolfram.com/TheMengerSponge/

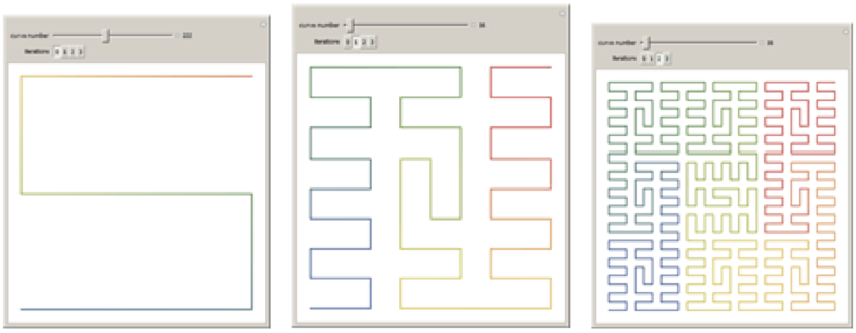
Puede proponerse accederse en las páginas que se indican al estudio de los siguientes fractales para analizar sus transformaciones.



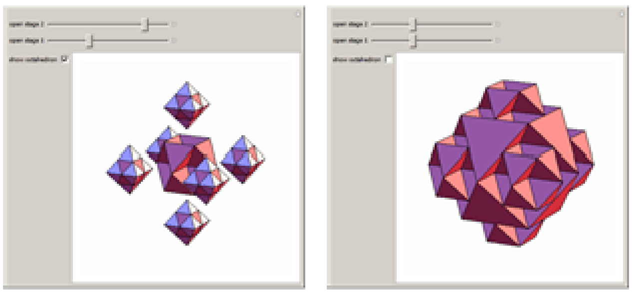
N-Flakes
http://demonstrations.wolfram.com/NFlakes/



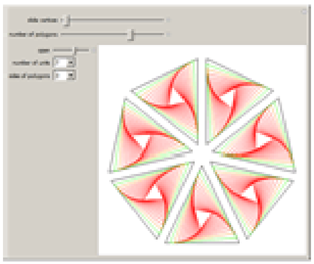
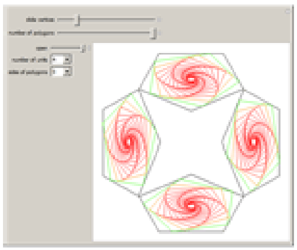
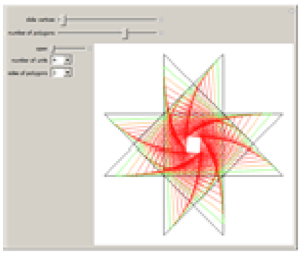
http://demonstrations.wolfram.com/SquareKochFractalCurves



Curva de Peano
http://demonstrations.wolfram.com/PeanoCurveExplorer



Octahedron Fractal
http://demonstrations.wolfram.com/OctahedronFractal/

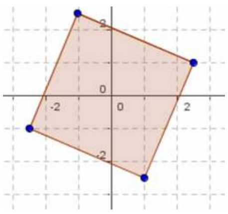
Polígonos giratorios
http://demonstrations.wolfram.com/WhirlingPolygons/

Número y operaciones
Números Complejos
Concepto.
Operaciones en C
Series
Concepto. Notación y lenguaje
Uso de calculadoras

Números Complejos
Concepto.
Operaciones en C

Se estudiará la ampliación de los conjuntos numéricos para arribar a los números complejos. Se expresarán números complejos en forma binómica, polar y trigonométrica. Se representarán geométricamente en el plano.
Se ayudará a los alumnos a establecer elaciones entre los diferentes tipos de representaciones. Se reformularán los algoritmos de cálculo para ampliarlos al nuevo campo numérico. Se promoverá el uso de calculadoras científicas para el cálculo con números complejos

Ejemplo 1
Este cuadrado centrado en el origen de coordenadas se construyó operando con el complejo $z = 5/2 + i$



Dibujar el cuadrado centrado en el origen que tenga un vértice en el afijo del complejo $z= 3+3i$

Ejemplo 2

Escribir un número complejo de modo que la dirección del vector que lo representa sea la de:

La bisectriz del primer cuadrante.

La recta de ecuación $y = -3x$

El eje real el eje imaginario

Ejemplo 3

- ¿Cuál debe ser el valor de x para que el número $(2+xi)^2$ sea imaginario puro?
  ¿Y para que sea real?
- Encontrar los valores de n que hacen ciertas las siguientes igualdades

$3+ i^n = 4$ $\qquad$ $3+ i^n = 2$

$3+ i^n = 3+ i$ $\qquad$ $3+ i^n = 3-i$

Ejemplo 4

Encontrar z tal que $\mathrm{Re}(z) = 3$ y $|z| = 5$

Encontrar z tal que $\mathrm{Im}(z) = 1$ y $|z| = 1$

Series

Concepto. Notación y lenguaje

Uso de calculadoras

El concepto de series es de gran utilidad en las ciencias aplicadas. En este nivel se pretende que los alumnos se aproximen al concepto de serie como sucesión de sumas parciales de una sucesión.

Ejemplo 5

Una hormiga parte de A para llegar a B. En cada paso recorre la mitad de lo que le falta para llegar a la meta.

a) En el primer paso, que podemos llamarlo p_1, recorre ½; en el segundo o sea p_2 camina ¼ y así siguiendo. Escribe el término general de la sucesión p_n que representa lo que camina la hormiga en cada paso.

b) ¿Cuánto lleva caminado luego de dar cinco pasos? ¿Y luego de diez pasos?

Escriba el término general de la sucesión T_n que representa la distancia total recorrida por la hormiga luego de dar n pasos.

Ejemplo 6

Si consideramos la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{n}$

cada **sumando** es menor que el anterior; en particular a medida que n aumenta los sumandos se acercan a 0, pues el $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Sin embargo, ¿es posible hallar n natural tal que $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\geq 3$? ¿Es único?

Ejemplo 7

- ¿Es posible escribir al número 1 como suma de tres sumandos?

Sí, por ejemplo $1 = \frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{4}{5}$

- ¿Y como suma de 100 sumandos? (Intentar por lo menos de dos formas distintas).
- ¿Y como suma de infinitos sumandos?

Analizar y comparar con la suma que propusiste

$$0,\widehat{9}=1$$

$$\begin{aligned}0,\widehat{9} &= \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+...+\frac{9}{10^{i}}+...\\ &= 9.(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...+\frac{1}{10^{i}}+....)\\ &=9.\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10^{i}}=1\end{aligned}$$

Hemos escrito al 1 como suma de infinitos sumandos.

Álgebra y estudio de funciones

Funciones trigonométricas

Concepto de límite
En el infinito
En un punto
Continuidad
Derivada.
Derivada en un punto
Función derivada
Derivadas

Integrales

Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son utilizadas en las ciencias para describir fenómenos periódicos que requieren que sus dominios sean números reales. Por este motivo el estudio de estas funciones debe enmarcarse en el estudio de funciones de $\Re$ en $\Re$.

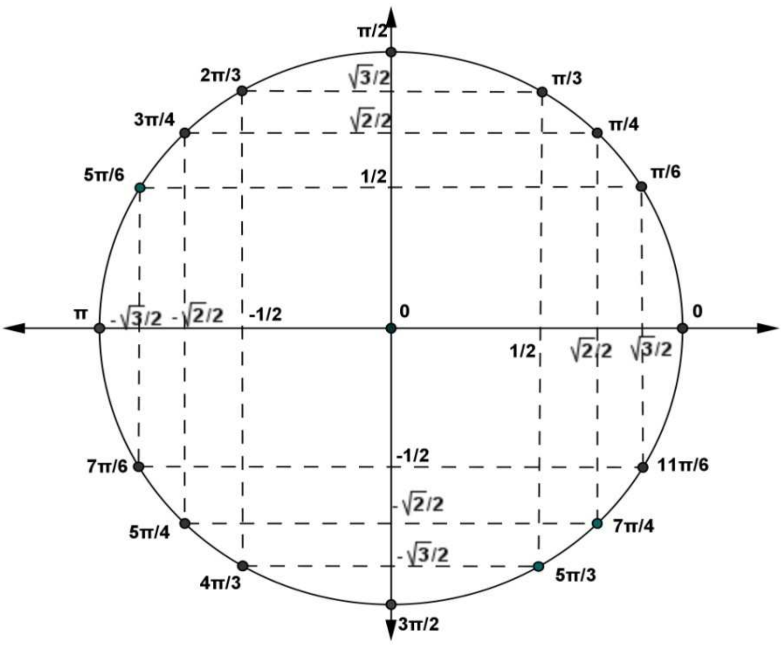
El tiempo que se dedique al análisis y discusión de las escalas elegidas en los ejes para graficarlas permitirá revisar conceptos de números reales de la misma forma que distinguirá esta mirada funcional de lo estudiado en la resolución de triángulos.

Para la resolución de ecuaciones trigonométricas será necesario leer desde la circunferencia unitaria a fin de no recurrir a fórmulas de reducción que resultan poco claras para los alumnos.

Ejemplo 1:

A partir del gráfico responder:

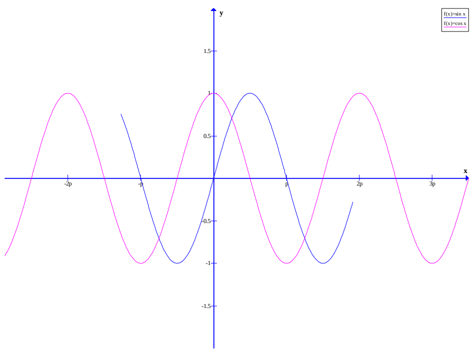
- ¿Para qué valores de x $\in$ [0,2 π) de cos x = ½ ?
- ¿Para qué valor de x $\in$ [o, 2π) es sen (x) = - sen(-x)?
- Dar razones gráficas que justifiquen la siguiente igualdad.”cos(x) = cos (2π-x)”
- Dar razones gráficas que justifiquen la siguiente afirmación: Para todo x $\in$ [o, 2π) vale que sen x = sen (π -x)



Ejemplo 2

A partir de los gráficos de las funciones sen x y cos x justificar la siguiente igualdad

$\text{sen } x = \cos (x + \pi/2)$



Concepto de límite

En el infinito

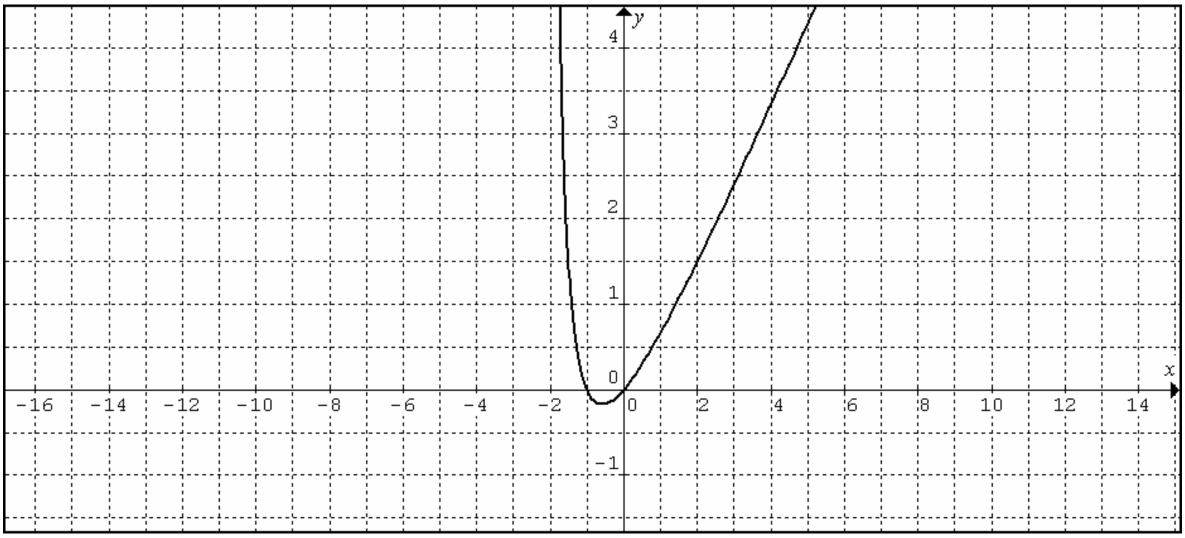
En un punto

Continuidad

El concepto de límite es central en el estudio del cálculo matemático. Será necesario abordar este concepto recuperando las ideas intuitivas de los alumnos y trabajar con ellas de manera de ir aproximándose al cálculo de límites. Los docentes plantearán situaciones que les permita a los alumnos caracterizar los casos de indeterminación y buscar estrategias para salvarlas.

Ejemplo 3

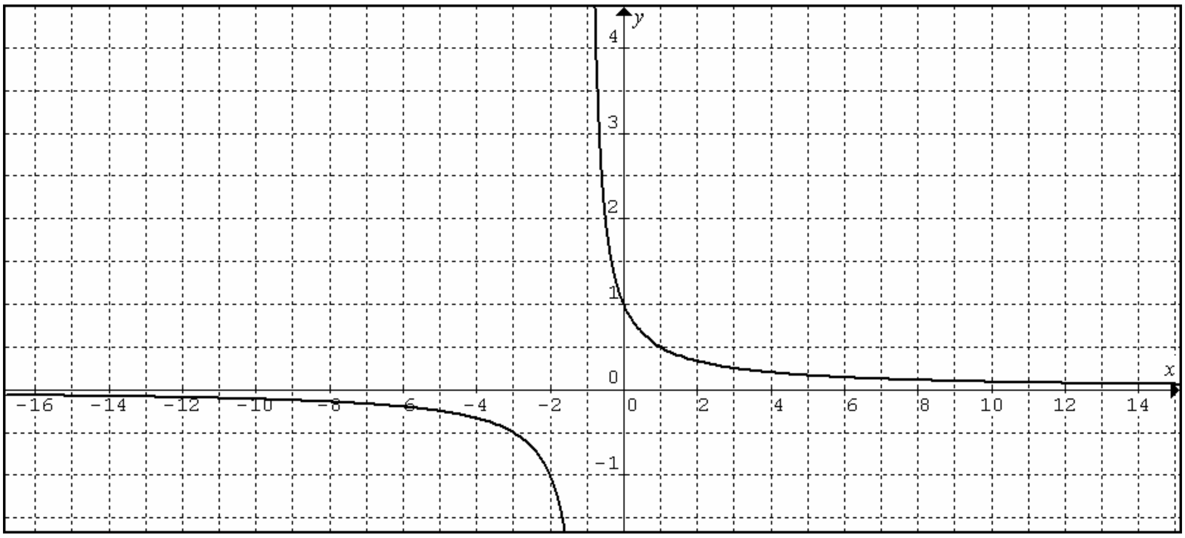
- Este es el gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 2}$ para x > - 2



Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

Este es el gráfico de

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x}$$



Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

En ambos casos tanto el numerador como el denominador tienden a +∝ cuando x→+∝ Sin embargo el límite no tiene el mismo resultado.

Explica con tus palabras qué significa "indeterminación del tipo infinito sobre infinito"

Ejemplo 5

Considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

- Completa la siguiente tabla de valores para cuando x se acerca a cero por la derecha:

x	1000	100	10	0.1	0.01	0.001
f(x)						

- ¿Qué ocurre con los valores de f(x) cuando x se aproxima a cero por la derecha?¿Se acercan los valores de f(x) a un valor en particular?
- Completa la siguiente tabla de valores para cuando x se acerca a cero por la izquierda:

x	-1000	-100	-10	-0.1	-0.01	-0.001
f(x)						

- ¿Qué ocurre con los valores de f(x) cuando x se aproxima a cero por la izquierda?¿Se acercan los valores de f(x) a un valor en particular?
- Interpreta con tus palabras el significado de:

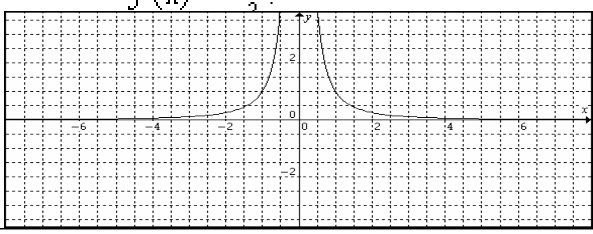
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad y \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Ejemplo 6

Considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Cuya gráfica es:



¿Cómo es el comportamiento de la función cuando x se aproxima a cero por la izquierda y por la derecha de cero?

Derivada.

Derivada en un punto
Función derivada

Si bien las técnicas de derivación son fácilmente adquiridas por los alumnos no debe apresurarse a dar las reglas pues el tiempo que se invierta en la construcción del concepto será el cimiento donde cobrarán significado tanto su importancia como sus aplicaciones . Es común encontrar alumnos que saben derivar a modo de mecanismo exótico pero con escaso interés e importancia desconocida para ellos. Trabajar en la construcción del concepto en este nivel no significa necesariamente trabajar con el calculo de derivadas por definición sino, por ejemplo, trabajar apoyándose en argumentos geométricos o gráficos.

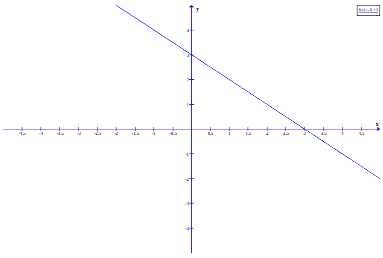
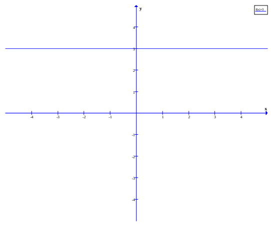
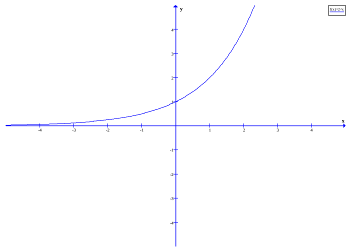
Ejemplo 7
Se coloca una taza de agua tibia en la heladera. Graficar la temperatura del agua en función del tiempo. ¿La razón inicial de cambio de temperatura es mayor o menor que la razón de cambio después de una hora de haberla colocado?

Ejemplo 8
Se registraron las temperaturas (en grados centígrados) cada hora, a partir de la medianoche hasta las 22 horas durante un día de septiembre en Bs. As.

x (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
T (ºC)	10	10	12	12	13	14	14	14	15	15	18	18	20	21	22	23	24	24	23

1) Encontrar la razón promedio de cambio de temperatura con respecto
Desde el mediodía hasta las 16 horas.
Desde el mediodía hasta las 14 horas.
Desde el mediodía hasta las 13 horas.
2) Estimar la razón de cambio de temperatura al mediodía.
Revisar valor de la tabla

Ejemplo 9
Dadas las siguientes funciones :

Graficar f' y justifica tu respuesta.

Ejemplo 10

Graficar una función cuya derivada sea siempre negativa.

Es importante proponer al alumno ejercicios que le permitan en la interpretación de la derivada en un punto y la función derivada.

Ejemplo 11

La recta tangente al gráfico de $g(x)$ en el punto $(1, 2)$ pasa por el punto $(2 , 7)$.

Averiguar $g(1)$ y $g'(1)$.

ESTUDIO DE FUNCIONES

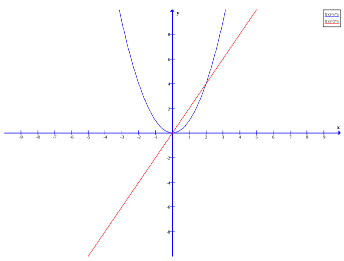
Ejemplo12

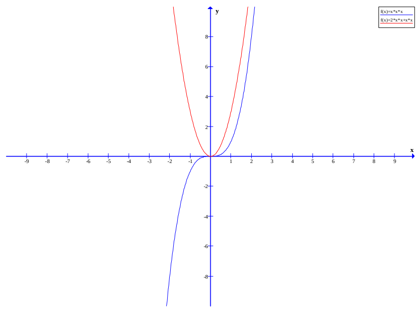
Este ejercicio está pensado para que los alumnos trabajen en grupo y junto con el docente y las herramientas teóricas necesarias llegar después de varios análisis a los resultados generales .

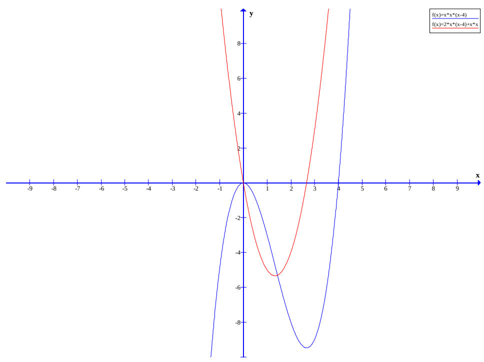
En los siguientes gráficos están representadas $f(x)$ y $f'(x)$

Decidir en cada caso sobre la validez de las siguientes afirmaciones:

Donde la derivada es negativa la función es creciente
Donde la derivada es cero la función alcanza un máximo.
Donde la derivada es cero la recta tangente es horizontal







Integrales

Aunque la definición de integral definida requiere de un profundo trabajo matemático los alumnos podrán calcular integrales mediante el cálculo de la antiderivada. Será necesario luego vincularla con el cálculo de área de figuras planas.

Probabilidad y estadística

Distribución Normal

Distribución Binomial

Uso de calculadoras

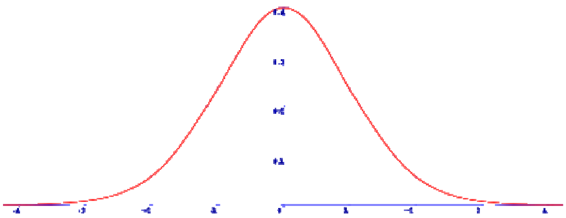
Distribución Normal

Esta distribución es la más importante de las distribuciones continuas porque muchas variables aleatorias tienen una distribución normal y suele aparecer en todo tipo de análisis estadístico como alturas, peso, efectos de dosis de medicamentos o duración de una pieza mecánica entre otros.

Se dice que una variable aleatoria continua *X* sigue una distribución normal de parámetros μ y σ y se denota $X \sim N(\mu, \sigma)$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

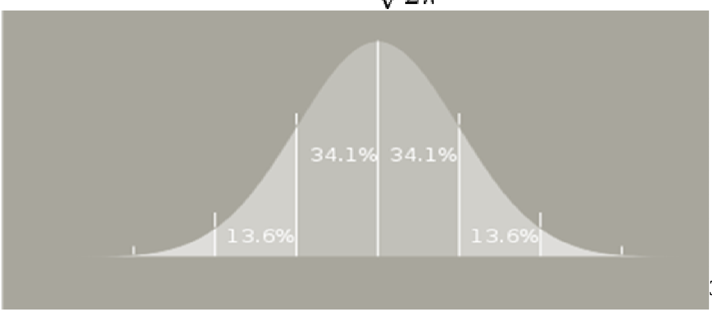
donde μ (mu) es la media y σ (sigma) es la desviación típica (σ^2 es la varianza).



Tiene una característica forma de campana, es continua es simétrica con respecto a la media y tiene dos puntos de inflexión situados a ambos lados de la media a una distancia **σ** de ella.

Se llama **distribución normal "estándar"** a aquella en la que sus parámetros toman los valores $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. En este caso la función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$f(x) = f_{0,1}(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R},$$



[3]

[3] http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_deviation_diagram.svg

Para cada media y cada desviación media hay una curva normal que se designa N(x, **σ**). El área bajo la curva es 1 por ser una distribución normal. Las tablas brindan las probabilidades de modo de ser una herramienta para la resolución de problemas.

Ejemplo 1

El peso de jugadores de un club se distribuye normalmente con un peso promedio de 65 kg y un desvío estandar de 4 kg. Determinar la probabilidad de que elegido al azar el jugador pese.

Menos de 63 kg

Más de 58 kg

Entre 59 y 67

Cuál es el peso no superado por:

el 25% de los deportistas

sólo superado por el 60% de los jugadores

¿Qué porcentaje de los jóvenes tiene un peso inferior a 65 kilos y pesa más de 58 kg?

Ejemplo 2

Un repuesto mecánico cuyo peso medio es 18,5 kg tiene un desvío estándar de 1,5.¿Cuál es la probabilidad de que un repuesto elegido al azar pese más de 21,5kg?

El peso responde a una N (18,5; 2,25)

Z= (W -18,5) / 2

$P (W > 21{,}5)= P \left(Z > \frac{21{,}5-18{,}5}{1{,}5} \right) =$

$= P (Z<2) =1- \Phi (2)$ 0,0227.

Distribución Binomial

La distribución binomial es de utilidad en experiencias en las que se repite varias veces la misma situación en idénticas condiciones.

$$P(x= k) = \binom{n}{k} \; p^{k} \cdot q^{n-k}$$

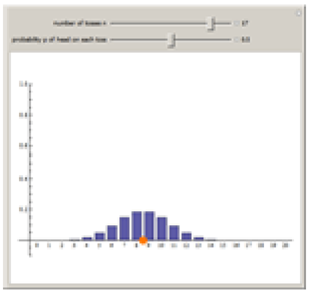
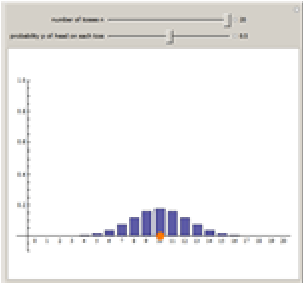
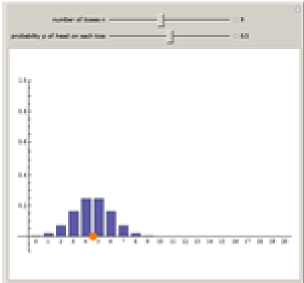
Ejemplo 3

Si una moneda es arrojada un número n de veces, el número de caras seguirá una probabilidad con distribución binomial.

Si se arroja el dado 5 veces y se desea saber la probabilidad de obtener 4 veces cara:

P(x= 4) = $\binom{5}{4}$ 0,4 ^{4} . 0,6^{1} =5x 0,0256 = 0,0768

En el siguiente sitio[4] se puede visualizar esta situación variando el número de tiradas como se observa en los siguientes gráficos.

Estas distribuciones binomiales B(n, p) en las que p=1/2 se parecen mucho a la distribución binomial cuanto más grande sea n.
En el caso de B (n, p) se parecerá a la curva normal cuanto mayor sea el producto n. p , si este producto es mayor que 5 esta aproximación será casi perfecta.

ORIENTACIONES DIDACTICAS

Resolución de problemas y formalización.

Existe una importante cantidad de bibliografía sobre las características que debe tener una actividad para constituirse en un problema para los alumnos. Desde este diseño curricular enfatizaremos algunas cuestiones.

- Un problema promueve el desarrollo de estrategias que favorecen una educación más autónoma, comprometida y participativa.
- Ser un problema no es una característica inherente a una actividad. Lo que constituye a cualquier propuesta en un problema es el vínculo que se establece entre el alumno y la tarea propuesta.
- Un problema es una situación que se le presenta al alumno para moverlo a la acción.

[4] Binomial Distribution" from The Wolfram Demonstrations Project
http://demonstrations.wolfram.com/BinomialDistribution/

- Si el alumno reproduce un procedimiento enseñado anteriormente es un ejercicio o un problema de aplicación pero no es en ese sentido que decimos aprender a través de problemas. Frente a los problemas los alumnos ponen en juego diferentes tipos de saberes relacionados con los conceptos, los procedimientos y/o las actitudes.

La institucionalización de los conocimientos comienza con los alumnos en la legitimación de sus procesos por parte del docente quien junto con ellos, generaliza, enmarca en una teoría y descontextualiza el saber aprendido.

Clima de la clase y tratamiento del error

Todo docente desea que los alumnos se comprometan con su propio aprendizaje. Esto se logra cuando desarrollan tareas de las que deciden hacerse cargo. Largas exposiciones suelen contar con pocos seguidores en las clases de matemática, aun cuando la clase aparente lo contrario.

Aprender matemática a partir de exposiciones teóricas para luego resolver ejercicios y problemas no es educar matemáticamente a un alumno. Para que el alumno tome un rol activo en primer lugar es necesario generar un clima de confianza en su propia capacidad y de respeto por la producción grupal.

En algunas oportunidades resultará conveniente planificar la tarea en el aula de modo tal que luego de la propuesta de trabajo haya una primera instancia de trabajo individual.

En esta etapa cada alumno prepara un aporte para el posterior trabajo grupal.

Dentro del grupo de trabajo cada integrante explicará su producción a los demás y entre todos construirán la forma de comunicarla con un registro adecuado para confrontar con las resoluciones de otros grupos. En ese momento es importante que el docente habilite la palabra de **todos** los integrantes.

Finalizada la puesta en común y la discusión de cada solución planteada, el docente establecerá el status matemático de las construcciones de los alumnos.

Los errores de los alumnos son indicadores del estado del saber y es el docente quien contribuirá para que avancen a partir de ellos. La superación de errores se logrará si los alumnos toman conciencia de ellos y se hacen cargo de su reparación en niveles crecientes de autonomía. Dar la respuesta correcta no es corregir un error, más aún debe estimularse al alumno para que elabore estrategias de control que le permitan decidir sobre la corrección de sus producciones.

Leer y escribir en Matemática

Comprender un texto supone dar significado a lo leído e incluirlo en el marco personal de significaciones previas, enriqueciéndolas. En matemática esta significación deberá ser correcta en términos de la ciencia y la cultura matemática. Palabras como "dependencia" o "semejanza" tienen en distintos contextos significados muy diferentes y en Matemática su definición es muy precisa. Es por este motivo que leer textos matemáticos es una actividad que debería estar presente en las clases.

Leer matemática significa entre otras actividades poder interpretar las cuestiones vinculadas al área que están presentes en textos de otras disciplinas, interpretando cómo se utilizan los modelos matemáticos para describir, analizar y predecir fenómenos de las ciencias naturales o sociales, procesos tecnológicos, o expresiones artísticas. Con este propósito será necesario proponer en las clases el análisis, comentario y discusión de textos propios de la ciencia así como textos de otras disciplinas donde el lenguaje matemático esté presente a través de gráficos, porcentajes o esquemas geométricos.

Las producciones matemáticas de sus propios compañeros constituyen un material muy rico sobre el cual los alumnos pueden iniciar la lectura de textos con el propósito de explicar, describir, argumentar, validar, dar precisión y complejizar la información.

Para promover el desarrollo de la capacidad lectora de los alumnos es esperable que en las clases los alumnos se enfrenten a una diversidad de textos que incluyan expresiones verbales, simbólicas, gráficas y trabajar en análisis de cada tipo de expresión favoreciendo el pasaje a otras expresiones propias o más complejas.

En el proceso de construcción de sentido de un lenguaje científico una paradoja que se debe transitar, por un lado los objetos matemáticos deberían preceder a su representación pero es a partir de esta representación que el objeto se conceptualiza a través de sus representaciones semióticas. Estas son necesarias para una comunicación más precisa y son imprescindibles para la construcción futura del concepto.

Será necesario para facilitar este proceso promover la producción y la lectura de textos que permitan ser representados por diversos lenguajes, desde el natural o coloquial hasta el simbólico teniendo en cuenta que esto no constituye una simple traducción sino que en estas relecturas las conceptualizaciones irán adquiriendo riqueza y precisión.

Uso de la calculadora

La calculadora y el software son herramientas al alcance de nuestros alumnos y de uso cotidiano en nuestra sociedad. En el diseño curricular su uso está presente en todos los bloques, ya que permite mejores visualizaciones sobre las cuales se pueden elaborar conjeturas, prever propiedades y descartarlas o comprobarlas.

Desplaza la preocupación por la obtención de un resultado centrando la actividad en la construcción de conceptos y búsqueda de nuevas formas de resolución.
La calculadora, además de un potentísimo instrumento de cálculo, es motivadora, ya que despierta el interés de los alumnos en la búsqueda de regularidades o genera interrogantes como en el caso de obtener por multiplicación números más pequeños, contrariamente a lo esperado o intuido. Por otra parte, constituye un instrumento de control neutral ya que el alumno puede utilizarla para verificar sus estimaciones sin percibir reprobación ni crítica ante las respuestas equivocadas. Se hace imprescindible su uso en un momento que el cálculo algorítmico dio lugar a nuevas formas de pensar en la educación matemática. "Las nuevas tecnologías son herramientas demasiado valiosas como para dejarlas fuera del aula. El imperativo es encontrar la conexión entre aquello que los jóvenes se sienten motivados a hacer y aquello que como educadores consideramos que tienen que aprender"[5]

Evaluación

La evaluación en Matemática Superior deberá entenderse como un proceso continuo que involucra todas las actividades que el docente propone a sus alumnos y que no está únicamente asociada a la calificación obtenida en evaluaciones escritas en las que se involucre solamente la memorización de enunciados o la aplicación mecánica de reglas.
En una prueba escrita, el alumno resuelve problemas, por eso en el momento de la corrección el docente deberá considerar, además de la correcta utilización de las herramientas matemáticas que involucre, la resolución del problema en su totalidad. Es decir, que una vez realizada la operatoria necesaria, el alumno sea capaz de contextualizar los resultados obtenidos para construir respuestas coherentes a la situación planteada, así como explicar y dar razón de los procedimientos elegidos para el abordaje de la misma haciendo uso de lenguaje matemático en sus diferentes variantes (coloquial, gráfico, simbólico) y produciendo un registro que permita comunicar todo esto de manera eficaz.
En estas condiciones, la evaluación es un proceso que brinda elementos a docentes y alumnos para conocer el estado de situación de la tarea que realizan juntos y como tal representa una oportunidad de diálogo entre ambos. Así, la devolución de las evaluaciones escritas, deberá realizarse previendo breves momentos de atención

[5] Nicholas Burbules, doctor en Filosofía de la Educación de la Universidad de Stanford en portal.educ.ar/noticias/entrevistas/nicholas-burbules

personalizada que complementen los comentarios que el docente pueda realizar en los exámenes cuando los corrige. A su vez, los resultados observados en la corrección permitirán al docente reorientar el proceso de enseñanza y planificar la tarea futura.

Es importante que los alumnos conozcan claramente qué es lo que se espera que logren en relación con el contenido que se está evaluando. Por lo general, la calificación final de una prueba solamente es reflejo de la distancia entre lo que se espera que logren y lo efectivamente logrado por ellos, pero en ocasiones es difícil para los alumnos darse cuenta de lo que el profesor considerará importante a la hora de corregir, por eso es indispensable que el docente explicite estas cuestiones aunque las considere triviales.

Resulta idénticamente importante que se evalúe cuáles son sus progresos en relación con los conocimientos matemáticos evaluados y que se les informe sobre lo que se espera que mejoren en este sentido porque esto contribuye también con la construcción del “oficio de alumno de Matemática”. Por esta razón resulta importante que el docente lleve registros personalizados de los progresos de todos sus alumnos y que considere la distancia entre las construcciones de los mismos y los saberes matemáticos como un ítem más, entre otros igualmente importantes, a la hora de calificar.

Cuando el docente califique a sus alumnos, además de ponderar el estado de situación de cada uno de ellos, deberá tener en cuenta también su propio proceso de enseñanza de la materia y contemplar la distancia entre lo planificado y lo efectivamente realizado.

BIBLIOGRAFÍA

Barbin, Evelyne y Douady, Regine (directores).*Enseñanza de las matemáticas:relacion entre saberes, programas y práctica.* I.R.E.M. Paris Topics Editions. 1996

Batanero, Carmen y Godino, Juan, *Estocástica y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2002.

Batanero, Carmen y Godino, Juan, *Razonamiento combinatorio.* Madrid, Síntesis, 1994.

Berlinski, David. *Ascenso infinito. Breve historia de las matemáticas.* Buenos Aires. Debate. 2006**.**

Berté, Annie, *Matemática Dinámica.* Buenos Aires, A-Z Editora,1999.

Berté, Annie, *Matemática de EGB 3 al polimodal.* Buenos Aires, A-Z Editora, 1999.

Bishop, Alan J. *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Buenos Aires.Paidós. 1999

Chevallard, Yves, *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Aique, 1997.

Chevallard, Yves; Bosch, Marianna; Gascón, Joseph, *Estudiar matemáticas*. *El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona, ICE/ Horsori, 1997.
Corbalan, Fernando. *La matemática aplicada a la vida cotidiana.*Barcelona. Grao. 1998
D´Amore, Bruno. *Bases filosóficas, pedagógica, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* Mexico. Ed. Reverté. 2006
D´Amore, Bruno. *La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución.* Bogotá.. Universidad Pedagógica Nacional. 2002
D´Amore, Bruno. *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivísticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Barcelona. Revista Uno 35, pp 90-106 .2004
D´Amore, Bruno. *La didáctica de la Matemática a la vuelta del milenio: raices, vínculos e intereses.* México. Revista Educación Matemática 12, pp 39-50. 2000
Del Valle de Rendo, Alicia y Vega Viviana, *Una escuela en y para la diversidad*. Buenos Aires, Aique. 2006.
Fischbein, Efraim, *The evolution with age of probabilistics, intuitively based misconceptions"* Journal of research in Mathematical Education, NCTM, 1997.
Fischbein Efraim; Vergnaud, Gérard, *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna, Pitagora Editrice, 1992.
de Guzmán, Miguel, *Aventuras matemáticas.* Madrid, Pirámide,1997.
Gvirtz, Silvina y Podestá, M. E. (comp), *Mejorar la escuela. Acerca de la gestión y la enseñanza.* Buenos Aires, Granica, 2004.
Imbernón, Francisco (coord), *La educación en el siglo XXI. Los ritos del futuro inmediato*. Barcelona, Graó, 2000.
Ghersi, Italo, *Matematica Dilettevole e curiosa.* Milano. Ulrico Hoeplie Edittore. 1978
Klimovski, Gregorio *Las desventuras del conocimiento científico.Una introducción a la epistemología.* Buenos Aires, AZ editora. 1994
Larson,Hostetler,Edwards,Cálculo I,México,McGraw-Hill,2006.
Litwin, Edith (comp), *Tecnología Educativa*. Buenos Aires, Paidós, 1995.
Medina Rivilla y Mata S., *Didáctica General*. Prentice may, Madrid, 2003.
Meirieu, Philippe, *La opción de educar*. Barcelona, Octaedro, 2001.
Nelsen, R. B. *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking.* Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 2001.
Odifreddi, Piergiorgio, *La Matemática del siglo XX. De los conjuntos a la complejidad.* Buenos Aires, Katz, 2006.

Ortega, Tomás, *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona, Grao, 2005.
Panizza, Mabel, *Razonar y conocer.* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Parra, Cecilia y Saiz, Irma (comps), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós Educador,1994.
Plagia, Humberto; Bressan, Ana; Sadosky, Patricia, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Rancière, Jaques, *El maestro ignorante*. Barcelona, Laertes, 2003.
Revista Uno. Nº 11. *Evaluación en Matemática*. Barcelona, Graó, 1997.
Revista Uno. Nº 16. *La gestión de la clase de Matemática*. Barcelona, Graó, 1997.
Rico, Luis (Coord), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona, ICE/ Horsori, 1997.
Sadosky, Patricia, *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. B*uenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Sessa, Carmen, *Iniciación al estudio didáctico del Algebra.* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Vergnaud, Gèrard, *Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de nuevo?* Buenos Aires, Edicial, 1997.
Vergnaud, Gèrard, *Concetti e schemi in una teoría operatoria della representazione,*
Wolton, Dominique, *Internet y después*. Barcelona, Gedisa, 2000.

Páginas en internet

http://www.sectormatematica.cl/articulos.
http://www.uncoma.edu.ar/.../clave/didáctica de_la_matematica/
http://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=219055
http://www.unlu.edu.ar/~dcb/matemat/geometa1.
http://www.sectormatematica.cl/revistas.htm
http://www.campus-oei.org/oeivirt/edumat.htm
http://www.ugr.es/local/jgodino
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/Herramientas/Recta/Recta.html
http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/MATEGENERAL/index.htm
http://www.educ.ar/educar/
http://www.recursosmatematicos.com/
http://www.edulab.ull.es/tecedu.

http://mathworld.wolfram.com/ProofwithoutWords.html

http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/dimen.htm

http://demonstrations.wolfram.com

http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html

http://es.wikipedia.org/wiki/Esponja_de_Menger

http://demonstrations.wolfram.com/TheMengerSponge/

http://demonstrations.wolfram.com/RecursiveExercisesI/

http://demonstrations.wolfram.com/RecursiveExercisesVNestedTriangles/

http://demonstrations.wolfram.com/PeanoCurveExplorer/