ES.4

Diseño Curricular para la Educación Secundaria

Matemática
Ciclo Superior

4º año

200 AÑOS BICENTENARIO ARGENTINO

Dirección General de Cultura y Educación

Buenos Aires La Provincia

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires /
Diseño curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior ES4: Matemática / coordinado por Claudia Bracchi -1a ed.- La Plata, 2010.
36 p.; 28x20 cm.

ISBN 978-987-1266-95-1

1. Diseño Curricular. 2. Educación Secundaria. 3. Matemática. I. Título
CDD 510.712

Equipo de especialistas
Coordinación Mg. Claudia Bracchi | Lic. Marina Paulozzo

Matemática. Ciclo Superior
Prof. Silvia Rodríguez | Prof. Rosario Alonso

Subsecretaría de Educación
Calle 13 entre 56 y 57 (1900) La Plata
Provincia de Buenos Aires

ISBN 978-987-1266-95-1

Dirección de Producción de Contenidos
Coordinación Área editorial DCV Bibiana Maresca
Edición Lic. María José Bonavita
Diseño María Correa

Esta publicación se ajusta a la ortografía aprobada por la Real Academia Española
y a las normas de estilo para las publicaciones de la DGCyE.

dir_contenidos@ed.gba.gov.ar

ÍNDICE

Presentación 5
El proceso de diseño curricular 6
Estructura de las publicaciones 6
La Matemática y su enseñanza en el Ciclo Superior
de la Escuela Secundaria 9
Mapa Curricular 10
Carga horaria 10
Objetivos de enseñanza 10
Objetivos de aprendizaje 11
Contenidos 12
Eje Geometría y Álgebra 12
Semejanza 12
Lugar Geométrico 14
Eje Números y Operaciones 17
Números reales 17
Sucesiones 17
Ejemplo 2 18
Eje Álgebra y Funciones 20
Funciones polinómicas 20
Funciones exponenciales 21
Eje Probabilidad y Estadística 24
Estadística 24
Orientaciones Didácticas 25
Resolución de problemas y formalización 25
Clima de la clase y tratamiento del error 25
Leer y escribir en Matemática 26
Uso de la calculadora 27
Orientaciones para la evaluación 28
Recursos en Internet 30

Presentación

"La Provincia, a través de la Dirección General de Cultura y Educación, tiene la responsabilidad principal e indelegable de proveer, garantizar y supervisar una educación integral, inclusiva, permanente y de calidad para todos sus habitantes, garantizando la igualdad, gratuidad y la justicia social en el ejercicio de este derecho, con la participación del conjunto de la comunidad educativa".[1]

La Escuela Secundaria obligatoria de seis años cumple con la prolongación de la educación común y, como se señala en el Marco General del Ciclo Básico de Educación Secundaria, representa el espacio fundamental para la educación de los adolescentes y los jóvenes de la provincia de Buenos Aires; es un lugar que busca el reconocimiento de las prácticas juveniles con sentido formativo y las incluye en propuestas pedagógicas que posibiliten construir proyectos de futuro y acceder al acervo cultural construido por la humanidad, para lo cual los adultos de la escuela ocupan su lugar como responsables de transmitir la cultura a las nuevas generaciones.[2]

En este marco, la Educación Secundaria tiene en el centro de sus preocupaciones el desafío de lograr la *inclusión* y la *permanencia* para que todos los jóvenes de la Provincia finalicen la educación obligatoria, asegurando los conocimientos y las herramientas necesarias para dar cabal cumplimiento a los tres fines de este nivel de enseñanza: *la formación de ciudadanos y ciudadanas, la preparación para el mundo del trabajo y para la continuación de estudios superiores.*

Una Escuela Secundaria inclusiva apela a una visión de los jóvenes y los adolescentes como sujetos de acción y de derechos, antes que privilegiar visiones idealizadoras, románticas, que nieguen las situaciones de conflicto, pobreza o vulnerabilidad. Esto hará posible avanzar en la constitución de sujetos cada vez más autónomos y solidarios, que analicen críticamente tanto el acervo cultural que las generaciones anteriores construyeron, como los contextos en que están inmersos, que puedan ampliar sus horizontes de expectativas, su visión de mundo y ser propositivos frente a las problemáticas o las situaciones que quieran transformar.

Tener en cuenta los distintos contextos en los que cada escuela secundaria se ha desarrollado, las condiciones en las que los docentes enseñan, las particularidades de esta enseñanza y las diversas historias personales y biografías escolares de los estudiantes, permitirá que la toma de decisiones organizacionales y curriculares promueva una escuela para todos.

Este trabajo fue socializado en diferentes instancias de consulta durante todo el 2009. Cabe destacar que la consulta se considera como instancia para pensar juntos, construir colectivamente, tomar decisiones, consolidar algunas definiciones y repensar otras.

Una escuela secundaria que requiere ser revisada, para incorporar cambios y recuperar algunas de sus buenas tradiciones, implica necesariamente ser pensada con otros. Por ello, esta escuela es el resultado del trabajo de la Dirección Provincial de Educación Secundaria y recoge los aportes efectuados por inspectores, directivos, docentes de las diferentes modalidades, estudiantes, especialistas, representantes gremiales, universidades, consejos de educación privada, partidos políticos, entre otros.

[1] Ley de Educación Provincial Nº 13.688, artículo 5.

[2] DGCyE, *Marco General de la Educación Secundaria. Diseño Curricular de Educación Secundaria.* La Plata, DGCyE, 2006.

El proceso de diseño curricular

El proceso de diseño curricular se inició en el año 2005, con una consulta a docentes en la cual se valoraron las disciplinas y su enseñanza; continuó en 2006 con la implementación de los prediseños curriculares como experiencia piloto en 75 escuelas de la Provincia. A partir de 2007, todas las escuelas secundarias básicas implementaron el Diseño Curricular para el 1° año (ex 7° ESB); durante 2008 se implementó el Diseño Curricular para el 2° año (ex 8° ESB) y en 2009 se implementó el correspondiente al 3° año (ex 9° ESB).[3]

Se organizó de este modo el Ciclo Básico completo, con materias correspondientes a la *formación común*. El Ciclo Superior Orientado, por su parte, se organiza en dos campos: el de la *formación común* y el de la *formación específica*. El primero incluye los saberes que los estudiantes secundarios aprenderán en su tránsito por el nivel, sea cual fuere la modalidad u orientación, y que son considerados como los más significativos e indispensables.[4] El segundo incorpora materias específicas de distintos campos del saber, según la orientación.

En este sentido, la organización del Ciclo Básico y su desarrollo, tanto en el Marco General como en los diseños curriculares de cada una de las materias, decidieron cuestiones importantes que se continúan en los diseños curriculares para el Ciclo Superior. Se resolvió su diseño de manera completa porque se estructura en orientaciones que debieron pensarse para aprovechar los espacios disponibles de los tres años.

El grupo de materias correspondientes a la *formación común* para todas las escuelas secundarias se menciona a continuación.

- Arte
- Biología
- Educación Física
- Filosofía
- Geografía
- Historia
- Inglés
- Introducción a la Física
- Introducción a la Química
- Literatura
- Matemática-Ciclo Superior
- NTICX (Nuevas Tecnologías de la Información y la Conectividad)
- Política y Ciudadanía
- Salud y Adolescencia
- Trabajo y Ciudadanía

Finalmente, estos diseños curriculares necesitan que los docentes participen y co-construyan con los jóvenes ritos que *hagan marca*, es decir que den cuenta de la impronta particular de cada escuela. Esto implica el reconocimiento y la integración a las rutinas escolares de los modos de comunicación y expresión de los jóvenes: programas de radio, blogs, publicaciones, espacios de expresión artística, entre otras alternativas.

La propuesta de una escuela secundaria pública, en tanto espacio de concreción del derecho social a la educación para los adolescentes y los jóvenes, toma en sus manos la responsabilidad de formar a la generación que debe ser protagonista en la construcción del destino colectivo.

[3] Las resoluciones de aprobación de los diseños curriculares correspondientes al Ciclo Básico de la Secundaria son: para 1° año Res. N° 3233/06; para 2° año 2495/07; para 3° año 0317/07; para Construcción de Ciudadanía Res. 2496/07 y Res. de Consejo Federal N° 84/09.

[4] En los lineamientos federales, este campo de la formación común se denomina Formación General.

Estructura de las publicaciones

El Diseño Curricular del Ciclo Superior para la Educación Secundaria de 4º año se presenta en tres tipos de publicaciones.

- Marco General del Ciclo Superior para la Escuela Secundaria.
- Materias comunes que corresponden a 4° año de todas las orientaciones.
- Orientaciones.

El siguiente cuadro representa cada una de las publicaciones con sus contenidos.

Marco General del Ciclo Superior para la Escuela Secundaria

- Geografía
- Historia
- Educación Física
- Biología
- Literatura
- Salud y Adolescencia
- Matemática - Ciclo Superior
- NTICx
- Introducción a la Física
- Inglés

Ciencias Naturales	Marco General de la Orientación
	Introducción a la Química

Ciencias Sociales	Marco General de la Orientación
	Psicología

Lenguas Extranjeras	Marco General de la Orientación
	Italiano I
	Francés I
	Portugués I

Arte	Marco General de la Orientación	
	Teatro	Actuación
	Artes Visuales	Producción y análisis de la imagen
	Danza	Lenguaje de la danza
	Literatura	Taller de lectura literaria y escritura
	Música	Lenguaje Musical

Educación Física	Marco General de la Orientación
	Prácticas Deportivas
	Educación Física y corporeidad
	Psicología

Economía y Administración	Marco General de la Orientación
	Sistemas de información contable
	Teoría de las organizaciones

Comunicación	Marco General de la Orientación
	Introducción a la Comunicación
	Psicología

Contenidos correspondiente al Ciclo Superior.

Contenidos correspondientes a 4º año.

La Matemática y su enseñanza en el Ciclo Superior de la Escuela Secundaria

El Ciclo Superior de la Escuela Secundaria representa para los jóvenes la oportunidad de profundizar los contenidos matemáticos trabajados durante 1º, 2º y 3º año del Ciclo Básico; analizarlos desde el punto de vista formal de la matemática como ciencia y abrir un espacio de construcción de nuevos conceptos. En este contexto, el desarrollo de la materia en el 4º año debe aportar niveles crecientes de formalización y generalización.

Para *hacer matemática* es ineludible resolver problemas, aunque esta actividad no se considera suficiente. La descontextualización de los resultados obtenidos es lo que permite generalizar y realizar transferencias pertinentes.

Si bien la estructura de la matemática como ciencia formal es el resultado final de conocimientos construidos por la comunidad científica, es importante que los docentes tengan presente que en la Escuela Secundaria ésta debe constituir una meta y no un punto de partida.

A pesar de que la matemática escolar difiere del trabajo científico, en el aula se pueden y deben vivenciar el estilo y las características de la tarea que realiza la comunidad matemática. De esta forma los alumnos considerarán a la disciplina como un quehacer posible para todos, tal como se definió en el Ciclo Básico de la Escuela Secundaria.

El imaginario popular asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad. Por lo general la matemática escolar se caracteriza por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, y demostraciones formales junto con un uso apresurado de la simbología. Esto contribuye a la creencia de que las personas que no son capaces de asimilar los conocimientos que se vinculan a ella de modo sistemático, en el orden y la cantidad en la que se presentan, fracasan por falta de capacidad para la materia.

Esta concepción determinista y elitista se contrapone con la propuesta del presente Diseño Curricular, que considera a la disciplina como parte de la cultura y valora a los alumnos como hacedores de la misma. Por este motivo se propone un cambio sustancial en el quehacer matemático del aula, mediante el cual el docente –a partir de la asimetría– sea un motor importante en la construcción de conocimientos que cobren sentido dentro de la formación integral del alumno.

En esta línea, una de las transformaciones que se producirán se vincula con el posicionamiento del docente, quien debe *abandonar* el lugar central que históricamente ha tenido dentro del aula para ocupar otro espacio en la dinámica de la clase; espacio que permita a los jóvenes interactuar con sus pares y con la propuesta de trabajo.

Sin embargo, el encuentro de los alumnos con las propuestas que se planifiquen no garantiza por si mismo que ellos aprendan matemática. La intervención del docente es fundamental para que el aprendizaje sea posible y debe responder a estrategias que trasciendan la exposición como única dinámica de clase.

Mapa curricular

<table>
<tr><td>Materia</td><td colspan="2">Matemática-Ciclo Superior</td></tr>
<tr><td>Año</td><td colspan="2">4º</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Ejes y núcleos sintéticos de contenidos</td><td>Geometría y Álgebra</td><td>Semejanza de figuras planas.
Teorema de Thales.
Trigonometría.
Lugar geométrico.
• Parábola.</td></tr>
<tr><td>Números y operaciones</td><td>Números reales.
• Concepto y representación.
• Completitud.
• Operatoria.
Sucesiones.
• Concepto. Notación y lenguaje.
Uso de calculadoras.</td></tr>
<tr><td>Álgebra y estudio de funciones</td><td>Ecuaciones e inecuaciones.
• Ecuaciones de segundo grado.
Concepto de funciones.
• Lectura de gráficos y dominio.
Funciones cuadráticas.
• Distintas expresiones.
Polinomios.
• Operaciones. Factorización.
• Teorema de Ruffini. Teorema de Gauss.
Uso de software para el estudio de funciones.</td></tr>
<tr><td>Probabilidad y estadística</td><td>Combinatoria.
Binomio de Newton.
Probabilidad.
• Espacio muestral. Sucesos incompatibles e independientes. Probabilidad condicional.
Uso de calculadoras.</td></tr>
</table>

Carga horaria

La materia Matemática-Ciclo Superior corresponde al 4º año de la Escuela Secundaria en todas las orientaciones del Ciclo Superior.

Su carga horaria es de 108 horas totales; si se implementa como materia anual, su frecuencia será de tres horas semanales.

Objetivos de enseñanza

- Promover el trabajo autónomo de los alumnos.
- Estimular el establecimiento, comprobación y validación de hipótesis por parte de los estudiantes, mediante el uso de las herramientas matemáticas pertinentes.

- Promover el trabajo personal y grupal, valorando los aportes individuales y colectivos para la construcción del conocimiento matemático.
- Promover el respeto por la diversidad de opiniones, así como una actitud abierta al cambio que permita elegir las mejores soluciones ante diferentes problemas matemáticos.[1]
- Retroalimentar las planificaciones particulares e institucionales en matemática a partir de la información que brindan las evaluaciones que se realicen.
- Alentar a los alumnos para que valoren sus producciones matemáticas y las comuniquen en grupos o ante la clase.[2]
- Planificar las instancias en las que se desarrollará el trabajo matemático.
- Evaluar los aprendizajes de los alumnos estableciendo relaciones entre lo aprendido y lo enseñado en las clases.
- Valorar los conocimientos matemáticos extraescolares de los alumnos y retomarlos para su formalización, explicación y enriquecimiento en el marco de la materia.
- Fomentar la utilización de los libros de matemática como material de consulta y ampliación de lo trabajado en clase.
- Concienciar acerca de la importancia que la construcción grupal de conocimientos matemáticos tiene en el desarrollo de aprendizajes valiosos.
- Escuchar, registrar y retomar los aportes de los alumnos durante la clase.
- Promover la relación entre los contenidos nuevos y los que se hayan trabajado con anterioridad.
- Estimular la mejora de la terminología y notación matemática en los diferentes contenidos.
- Incorporar, con distintos grados de complejidad, la enseñanza de la Matemática a través de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Conectividad (NTICX), a los fines de que sean utilizadas para el desarrollo de preguntas, formulación y tratamiento de problemas, así como para la obtención, procesamiento y comunicación de la información generada.

Objetivos de aprendizaje

- Valorar la matemática como objeto de la cultura.
- Construir conocimientos matemáticos significativos.
- Utilizar estrategias de trabajo matemático en el aula en un marco de responsabilidad, solidaridad y convivencia democrática.
- Establecer transferencias pertinentes de los conocimientos adquiridos a situaciones intra y/o extra matemáticas.
- Trabajar de manera autónoma e identificar modelizaciones de situaciones que se presenten en diferentes campos.
- Comprender la importancia de la formalización como herramienta de comunicación en el ámbito de la matemática.
- Distinguir las definiciones de las explicaciones y los ejemplos.
- Explicitar el rigor en las estrategias matemáticas que se utilizan.
- Comprobar lo razonable de los resultados en las respuestas a los problemas.
- Valorar la propia capacidad matemática.

[1] Es importante establecer puntos de encuentro con los desarrollos personales o logrados en pequeños grupos.

[2] Es posible realizar consultas, defender posturas, construir hipótesis o tratar de explicar construcciones matemáticas personales o ajenas.

Contenidos

La materia Matemática-Ciclo Superior se organiza en cuatro ejes: Geometría y Álgebra; Números y operaciones; Álgebra y estudio de funciones; y Probabilidades y estadística. Éstos incluyen los núcleos sintéticos de contenidos descriptos en el mapa curricular y agrupan conocimientos vinculados entre sí.

Cada eje continúa con lo propuesto en los diseños curriculares del Ciclo Básico, a la vez que profundiza y orienta el trabajo hacia los niveles de argumentación y formalización que se espera que los alumnos adquieran a lo largo de los tres años que componen el Ciclo Superior de la Escuela Secundaria. En este sentido, el Diseño Curricular para el 4° año incorpora contenidos nuevos que complementan y refuerzan la formación básica de los estudiantes.

Al momento de su abordaje, el docente debe tener en cuenta que:

- el orden en que se presentan los ejes y los núcleos sintéticos no implica que necesariamente se enseñen de ese modo. Es posible modificarlos en tanto se consignen razones justificadas en la planificación;
- el tratamiento de un eje puede provocar la aparición de nodos que refieren a otros ejes.

La descripción de contenidos que se desarrolla a continuación incluye orientaciones didácticas e incorpora ejemplos de problemas y situaciones de enseñanza, a partir de las cuales el docente puede trabajar los diferentes ejes y núcleos.

Eje Geometría y Álgebra

Propone la resolución de problemas que involucren figuras planas y cuerpos tridimensionales, de modo tal que sea posible relacionar e integrar los conceptos trabajados con anterioridad y los nuevos temas que se traten: teorema de Thales, trigonometría, y teoremas del seno y del coseno.

El abordaje de campos de problemas permite poner en juego significados, conceptos y términos; relaciones que darán lugar a registros orales, gestuales y de escritura que, en la interacción didáctica, serán institucionalizados –a la vez que activarán instrumentos semióticos–. Con frecuencia, se cree que el alumno está aprendiendo conceptos cuando en realidad está aprendiendo a hacer uso de signos.

La adquisición conceptual de un objeto matemático depende de las representaciones semióticas que acerca de él se logren, ya sea en el tratamiento en un mismo registro o en la conversión de un registro a otro. La transmisión verbal y unilateral de los conceptos sólo garantiza un verbalismo vacío.

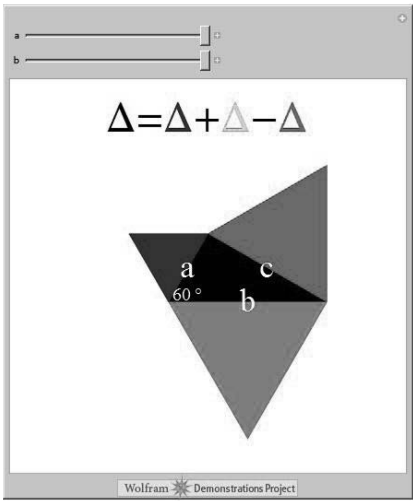
Los alumnos pueden encontrar en Internet una importante cantidad de visualizaciones interactivas y utilizarlas como punto de partida para el análisis. Las mismas constituyen otro entorno de aprendizaje, por lo que se debe alentar su búsqueda e inclusión en el trabajo en el aula. Los jóvenes saben mucho sobre tecnología y esto supone, tal como lo manifiesta Nicholas Burbules, un importante potencial educativo en tanto les otorga una relación más personal con el saber.

Ejemplo 1. Relación entre las áreas de un triángulo rectángulo y las correspondientes a los equiláteros construidos sobre sus lados

El área del triángulo rectángulo, de ángulos agudos de 30° y 60°, se puede expresar en función de las áreas de los triángulos equiláteros A, B y C construidos sobre cada uno de sus lados.

A partir de esta imagen[3] se puede plantear el problema que se presenta a continuación.

Mostrar que: área de A + área de B - área de C = área del triángulo rectángulo T.



El área del triángulo rectángulo puede expresarse como $\frac{1}{2}$ *a c*, y dado que *c = b sen 60°* se tendrá:

$$\frac{1}{2}\ a\ c = \frac{1}{2}\ sen\ 60° \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ a\ b = \quad a\ b = \frac{\sqrt{3}}{4}\ a\ b$$

El área de todo triángulo equilátero de lado *l* puede expresarse como $\frac{\sqrt{3}}{4}\ l^2$

[3] La imagen virtual se encuentra disponible en The Wolfram Demostrations Project, http://demonstration.wolfram.com.

Por lo que: $\frac{\sqrt{3}}{4}\ a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\ b^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\ c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\ (a^2 + b^2 - c^2)$

Aplicando el teorema del coseno:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\ cos\ 60° = a^2 + b^2 - a\,b$

Se tendrá:

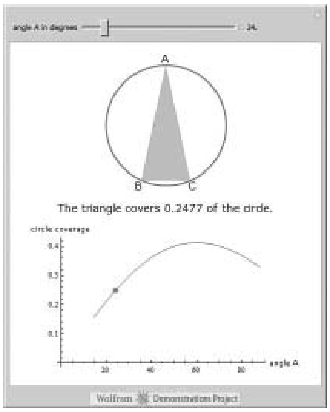
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\ a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\ b^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\ c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\ (a^2 + b^2 - c^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ [a^2 + \ b^2 - (\,a^2 + b^2 - a\,b)] = \frac{\sqrt{3}}{4}\ a\,b$$

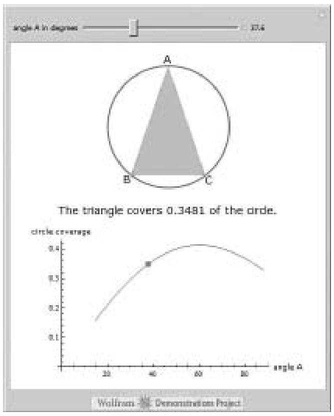
Se demuestra así la igualdad propuesta.

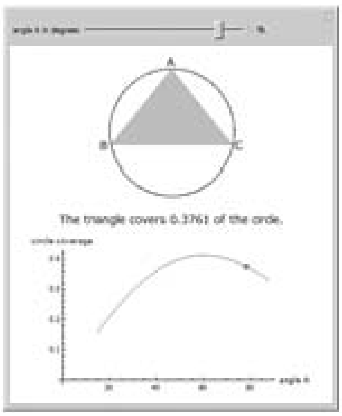
Ejemplo 2. Relación entre el área del triángulo isósceles inscripto y el área del círculo

En Internet es posible encontrar un simulador que calcula cuál es la parte de un círculo que se cubre, de acuerdo al modo en que varía la medida del ángulo del triángulo que se dibuja dentro de él; esto se describe a través de una curva.

La función que se grafica mide el porcentaje del área ocupada por el triángulo dentro del círculo, en función del ángulo con vértice en A, con A fijo.







Las preguntas que se pueden formular a los alumnos, vinculadas con estas imágenes, son múltiples.

- ¿Qué variables vincula la función?
- ¿Cuál es la variable dependiente?
- ¿En qué unidad se mide la variable independiente?
- ¿Para qué valor esta función alcanza el máximo?

Dentro del campo geométrico se pueden tratar diversos temas:

- dada una circunferencia, ¿cómo obtener el área del triángulo equilátero inscripto en función del radio?;
- dado un triángulo, determinar el centro de la circunferencia circunscripta;
- ¿qué datos son necesarios para calcular el área de un triángulo isósceles inscripto en la circunferencia?

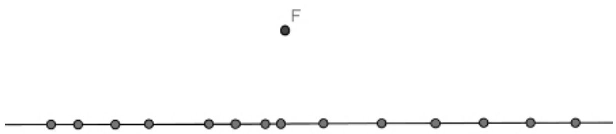
Los ejemplos planteados tienen apertura a futuros abordajes y ofrecen la posibilidad de retomar conceptos de este eje y de otros; enriquecen las representaciones ya que, sin ser discursivos, vinculan distintos temas matemáticos. Esto permite alcanzar una mirada integradora y optimizar el tiempo y los recursos mediante el trabajo simultáneo de contenidos de varios ejes.

Por último, en este apartado del Diseño Curricular se propone el estudio de la parábola como lugar geométrico, la cual se aborda además como función cuadrática en el eje Álgebra y estudio de las funciones. Las diferentes miradas y representaciones sobre un mismo tema permiten un mejor acercamiento a la formación del concepto, por lo que el docente puede decidir en qué orden trabajarlo –en tanto la organización de los ejes y los núcleos no es secuencial y posibilita el tratamiento simultáneo–.

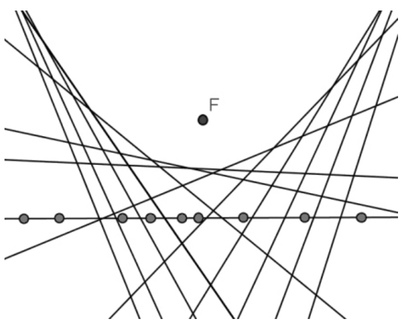
Ejemplo 3

Teniendo en cuenta que la parábola es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de un punto fijo llamado foco y una recta fija denominada directriz, se puede comenzar con una primera aproximación por dobleces de papel.

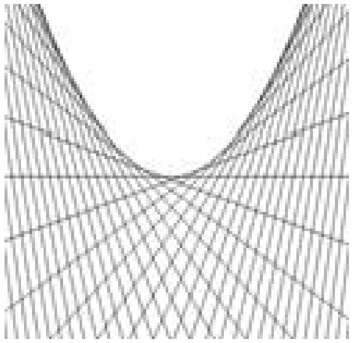
- Marcar puntos de una recta y un punto F exterior a ella.



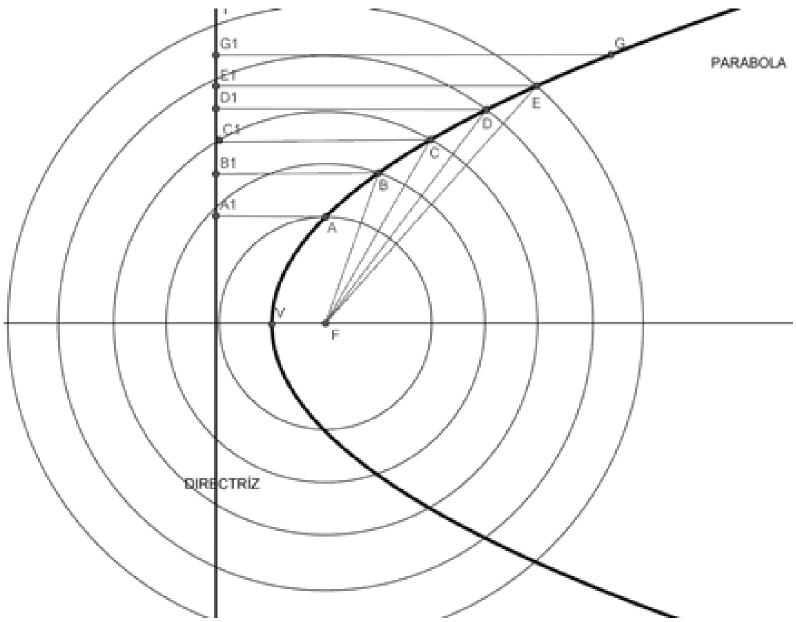
- Plegar la hoja hasta hacer coincidir F con cada uno de los puntos marcados en la recta.



- Marcar en cada caso el doblez de la hoja. Al abrir el papel los pliegues determinan la curva en la que el punto es el foco y la recta la directriz.



Lo propuesto se puede trazar con un software como Geogebra, Cabri u otros, que se encuentran disponibles en Internet y son de acceso gratuito.



Ejemplo 4

El gráfico de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ es una parábola. ¿Cuál es su foco?; ¿y su directriz?

Eje Números y operaciones

Propone retomar el estudio de los números reales, a partir de los diseños curriculares del Ciclo Básico de la Escuela Secundaria, con el fin de profundizar conceptos y utilizar distintos tipos de cálculo mental, escrito, exacto o aproximado.

En este contexto, el uso de las calculadoras científicas como herramientas al servicio del pensamiento permite profundizar la reflexión de los alumnos, quienes disminuyen el tiempo que dedican a repeticiones mecánicas de algoritmos para utilizarlo en la elaboración de conjeturas y la discusión sobre la validez de las mismas.

Números reales

Algunos aspectos que se deben trabajar en diversos marcos y oportunidades son:

- lo que caracteriza al conjunto de números reales es su completitud;
- $\sqrt{2}$ (o la raíz cuadrada de cualquier otro número natural que no sea cuadrado perfecto) no es una operación a resolver. Es un número y, además, es la única forma de escribirlo de modo exacto.

En cuanto a la operatoria, es preferible un cálculo sencillo, razonado y reflexionado antes que extensos cálculos que se realizan de manera mecánica con escaso valor matemático.

En este sentido, tiene mayor riqueza el trabajo con las definiciones y propiedades de las operaciones, que la memorización de procedimientos para extraer factores o racionalizar de forma mecánica. La utilización de calculadoras científicas debe ser objeto de un estudio específico con espacio para la discusión de procedimientos y resultados.

Ejemplo 1

Buscar dos números irracionales, tales que su suma y su producto sean racionales.

Ejemplo 2

Hallar $a \in \Re$ tal que a^2 sea irracional y a^4 sea racional.

Ejemplo 3

$\sqrt[5]{7}$ es irracional.

Hallar el menor $n \in \mathbb{N}$, tal que $\left(\sqrt[5]{7}\right)^n$ sea racional.

Hallar el menor $n \in \mathbb{N}$, tal que $\left(\sqrt[4]{25}\right)^n$ sea racional.

Ejemplo 4

Determinar las dimensiones de un triángulo equilátero, tal que la medida de su área sea el triple de la de su perímetro.

Sucesiones

En los primeros años de escolaridad se construyen las sucesiones de números naturales; mientras que en la Escuela Secundaria éstas resultan un concepto propicio para que los alumnos reconozcan regularidades, formulen hipótesis –al buscar el término general de una sucesión– y discutan sobre distintas notaciones.

Para facilitar estas cuestiones, es necesario promover la producción y la lectura de situaciones que se modelicen por medio de sucesiones y que, a su vez, se representen a través de diversos lenguajes, desde el natural o coloquial hasta el simbólico. De este modo, las conceptualizaciones adquirirán riqueza y precisión durante las relecturas.

Ejemplo 5

A partir de un cuadrado de área 1, seguir el siguiente procedimiento:

1. se divide la figura en dos partes de igual área y se pinta una de las mitades;
2. la mitad sin colorear se vuelve a dividir en dos partes de igual área y se pinta una de ellas;
3. se repite el paso.

Una vez realizadas estas acciones, se sugiere el trabajo sobre los puntos que se describen.

- Completar sabiendo que a_n es el área de la figura pintada en el paso n.
- $a_1 = 1/2$; $a_2 = 1/4$; $a_3 = \ldots$; $a_4 = \ldots$; $a_n = \ldots$
- Se afirma que en el segundo paso se pintó más del 70% de la figura; ¿es así?, ¿qué cuenta justifica esta respuesta?
- ¿Cuántos pasos son necesarios para pintar más del 90% del cuadrado?; ¿y más del 99%?
- Analizar y discutir la veracidad o falsedad de las afirmaciones que se presentan a continuación; buscar argumentos matemáticos que justifiquen la respuesta.
  - En algún momento, el cuadrado queda todo pintado.
  - En un número finito de pasos se termina de pintar todo el cuadrado.
  - No importa la cantidad de pasos que se den, siempre queda una parte del cuadrado sin pintar.
  - El área que queda sin pintar disminuye en cada paso.
  - El área que queda sin pintar se puede hacer tan pequeña como se quiera.

Ejemplo 6

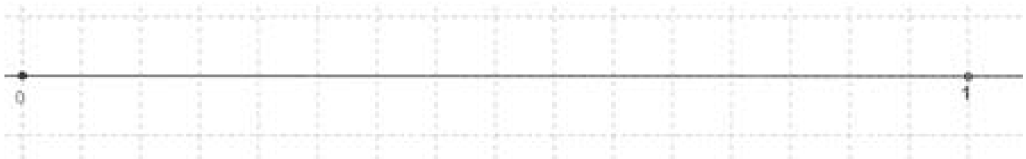
Representar gráficamente las siguientes sucesiones en la recta real. Ubicar los primeros cuatro términos considerando que:

$an = \frac{1}{2^n}$

$a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \ldots$; $a_3 = \ldots$; $a_4 = \ldots$

$an = (-1)^n/n$

$an = \frac{n}{2} - 2$



Eje Álgebra y estudio de funciones

Profundiza la resolución de ecuaciones e inecuaciones, mediante el análisis de formas gráficas y analíticas; a partir de ellas se modelizarán y trabajarán situaciones intra y extra matemáticas. Se propone la comparación de métodos de resolución y discusión del número, así como también tipos de soluciones halladas de acuerdo a los contextos de las situaciones a resolver. Se presenta el trabajo con polinomios de una variable y se promueve la utilización de software para la representación gráfica de funciones.

Ecuaciones e inecuaciones

Los alumnos construirán el concepto de ecuación proposicional en la medida que resuelvan ecuaciones. Para que esto sea posible es indispensable que reflexionen acerca del conjunto de soluciones posibles y expliciten el concepto de ecuaciones equivalentes.

Para resolver una ecuación se realizan procedimientos tales como la escritura sucesiva de ecuaciones equivalentes, dado que cada una de ellas tiene el mismo el conjunto de soluciones. Resulta conveniente plantear situaciones en las cuales el uso de ecuaciones no sólo se realice para traducir una pregunta numérica a otro lenguaje, sino para probar generalizaciones del tipo: "todo número par es el anterior de un impar".

Para subsanar errores frecuentes, es importante presentar situaciones en las que la solución no sea única y que requieran de una discusión acerca de la cantidad y tipo de soluciones. A modo de ejemplo, se analiza la siguiente ecuación:

$$2(x+5) = 2x+10$$
$$2x+5 = 2x+5$$
$$0 = 0$$

Es común que los alumnos respondan que "la solución es 0", ya que desde su mirada resolver una ecuación consiste en alcanzar un número en el último paso. La reflexión sobre las soluciones de cada expresión permitirá superar las dificultades planteadas.

En este contexto, conviene reforzar la diferencia entre el cálculo de las soluciones de $x^2=9$, $S=\{3, -3\}$ y el resultado de la operación $\sqrt{9}$, ya que ésta tiene como único resultado 3.

Para el estudio de las ecuaciones de segundo grado, se sugiere utilizar los distintos modelos de calculadoras que coexisten en el aula, sobre todo si se considera que ellas resuelven este tipo de problemas.

Concepto de funciones

La función es una de las nociones más importante de la matemática. Hay diversas maneras de abordar el tema, pero en el nivel en que se trabaja en este Diseño Curricular resulta pertinente su introducción a partir de la dependencia entre variables.

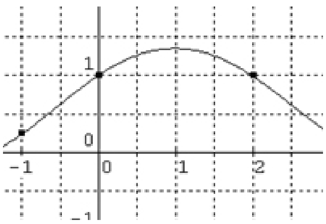
Es importante que las funciones se presenten desde sus distintas representaciones: una tabla, un gráfico, un relato o una fórmula. Es conveniente, en la medida de lo matemáticamente posible, que se trabaje en el pasaje de un registro semiótico a otro.

No se debe apresurar el trabajo con funciones específicas (lineales, cuadráticas, etc.). Cuanto más variadas sean las situaciones planteadas, la identificación de las variables, la elección de la escala para su representación y la lectura de gráficos serán aspectos que contribuyan a la construcción del concepto de función.

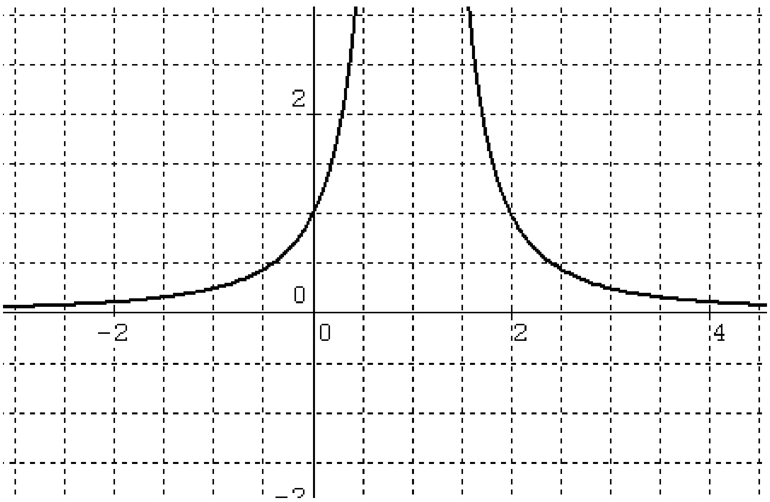
Se debe jerarquizar el estudio del dominio de la función con la que se trabaje, tanto desde el gráfico como desde las fórmulas. El método de graficar por puntos obtenidos, a partir de la construcción de tablas sin estudio del dominio de la función, puede conducir a graves errores conceptuales como por ejemplo en el caso de $f(x) = 1/ (x-1)^2$

x	0	1/2	2	-1	3	3/2
$1/ (x-1)^2$	1	4	1	1/4	1/4	4

A partir de esta tabla, los alumnos podrían suponer que el gráfico que corresponde se construye de este modo:



Dicha suposición es errónea, puesto que el dominio de la función es R-{1} y corresponde el siguiente gráfico:

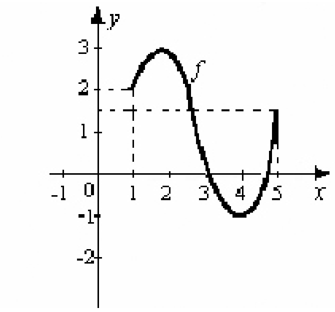


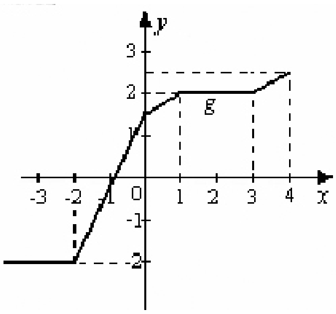
En el caso de trabajar con funciones que modelizan problemas, se debe distinguir entre el dominio natural (matemático de la fórmula) y el dominio propio de la situación que modeliza. Es conveniente proponer la discusión sobre funciones con dominio discreto y también funciones definidas a trozos.

Es importante también discutir con los alumnos la notación elegida y distinguir, a partir de esa selección, que si x es un elemento del dominio, f(x) es un elemento de la imagen.

Ejemplo 1

A partir de las siguientes funciones:





Graficar:

$h_1 = f(x)+1$

$h_2 = f(x+1)$

$h_3 = -f(x)$

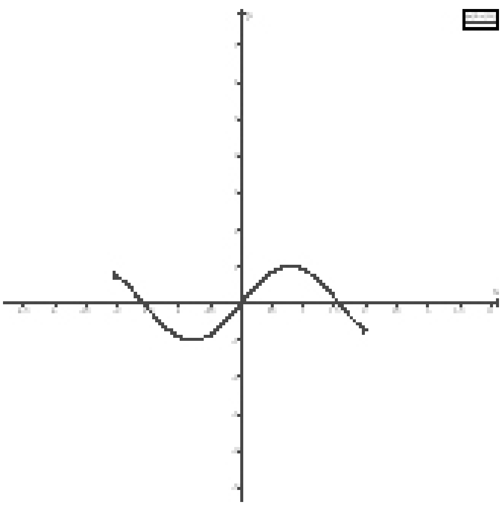
$h_4 = g(x)-2$

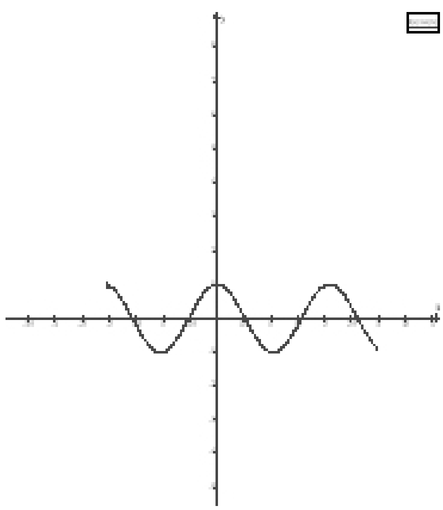
$h_5 = g(x-2)$

$h_6 = -g(x)$

Ejemplo 2

A partir de las siguientes funciones:





Graficar:

$g_1 (x) = f (-x)$

$g_2 (x) = -f (-x)$

Funciones cuadráticas

Graficar una función cuadrática en el proceso de conceptualización se convierte en un problema que no se resuelve con la confección de tablas de valores realizadas sin criterio. Se lo hace en realidad a partir de la discusión sobre cuántos y cuáles son los puntos estratégicos para lograr el gráfico.

En este sentido, se presenta la función cuadrática en su forma canónica, factorizada y polinómica, a la vez que se valora en cada representación la información que la fórmula ofrece sobre el gráfico.

Ejemplo 3

- Si se quiere graficar $f (x) = (x-5)^2 + 2$, ¿qué valores se podrían elegir para hacerlo?
- Si se sabe que el eje de simetría del gráfico de una función cuadrática es $x = 1$ y que una de sus raíces es $x = 7$, ¿para qué otro valor de x es $f (x) = 0$?

Es interesante reflexionar acerca de la información que la fórmula brinda en referencia a un gráfico, y que permite anticipar la representación como los puntos de intersección con los ejes y la ubicación del vértice, aún sin graficarla.

Ejemplo 4

Completar el siguiente cuadro:

	$f (x) = (x+4)^2 - 5$	$f (x) = (x-3) (x+5)$	$f (x) = x (x+2)$
Eje de simetría			
Vértice			

Inversamente, a partir de características del gráfico es posible encontrar la fórmula asociada.

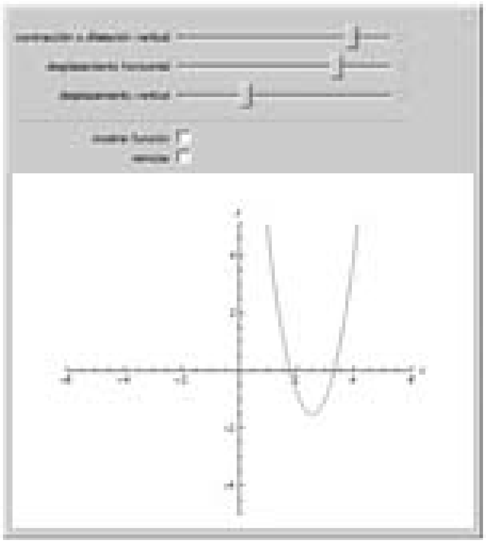
Ejemplo 5

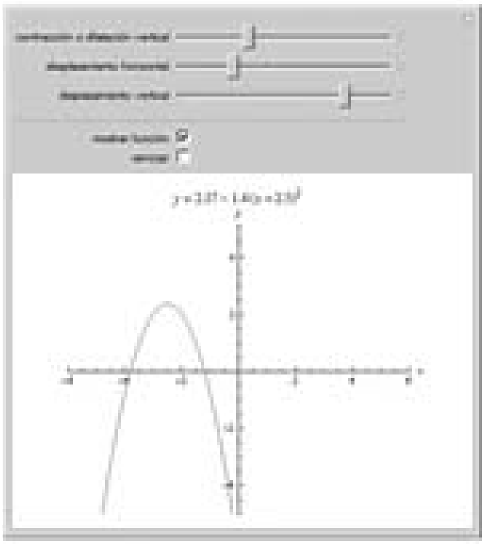
Hallar la expresión de la función cuadrática que cumpla con los siguientes requisitos:

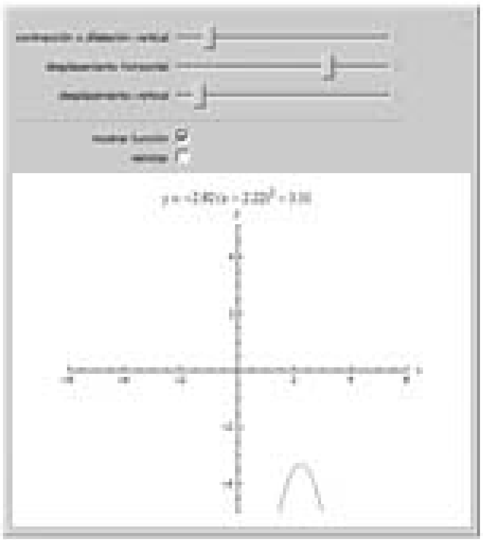
- el gráfico pasa por el punto (3, -1) y su vértice es el punto v = (-2, 3).
- el gráfico interseca al eje en (0, 7) y su vértice es el punto v = (3, 2).

Ejemplo 6. Modificaciones de la función cuadrática

En Internet[4] los alumnos pueden encontrar una propuesta interactiva que les permita observar las transformaciones que sufre el gráfico de la función cuadrática $y = a(x-b)^2+c$, al modificarse los valores de los parámetros a, b y c.







[4] Es posible ver las modificaciones de la función cuadrátrica en:
http://demonstrations.wolfram.com/ModificacionesDeLaFuncionCuadraticaSpanish/

Es necesario que los alumnos trabajen con la representación gráfica de funciones Graphmatica, Derive, Geogebra y otras disponibles libremente en Internet.

Polinomios

La enseñanza de los polinomios en la Escuela Secundaria tiene una larga tradición, sobre todo vinculada a listas de ejercicios en una y varias variables.

En el Diseño Curricular de Matemática-Ciclo Superior se trabaja el concepto de indeterminada en una variable. Se prioriza, además de la operatoria elemental, la factorización de los polimonios apelando a los teoremas de Ruffini y de Gauss y las propiedades, pero no desde la mecanización de casos de factoreo.

Se promueve que el alumno se aproxime o encuentre alguna raíz por método interactivo y luego divida para bajar el grado.

Es posible integrar al trabajo con polinomios, el Binomio de Newton que se desarrolla en el eje de Probabilidad y estadística.

Eje Probabilidad y estadística

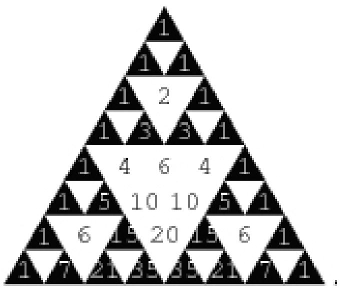
En la comunicación matemática, la simbología propia del lenguaje y las definiciones precisas constituyen un fin a perseguir y construir, cuidando que el lenguaje formalizado no sea un obstáculo para la comprensión de los conceptos. En otras palabras, el lenguaje formal debe contribuir tanto a la claridad de la comunicación como a futuras construcciones teóricas; no debe referir a una información adquirida por el alumno de forma mecánica, arbitraria y carente de significación.

Se debe jerarquizar la construcción de estrategias de pensamiento por sobre la aplicación arbitraria de fórmulas. Tanto para el abordaje de los temas de combinatoria como en el estudio del Binomio de Newton es necesario el trabajo con los alumnos a partir de casos sencillos que permitan arribar a generalizaciones.

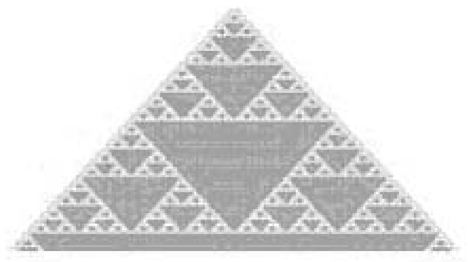
La combinatoria consiste en contar, sin enumerar, con estrategias sencillas que llevan a generalizar situaciones más complejas a través de formas simples de razonar.

Es oportuno trabajar con el Triángulo de Tartaglia para encontrar regularidades y destacar las configuraciones que se logran al colorear con diferentes tonos, en cada tabla triangular, los números pares e impares, los múltiplos de cierto número elegido, o los que tienen igual resto al dividirlos por un mismo número (congruencia módulo n). Esto se puede observar en los dibujos que presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1



Números pares e impares


Números múltiplos de tres

También se puede proponer el análisis de los números que se obtienen como suma en cada fila.

Ejemplo 2. Obteniendo potencias de 2

1 1 $2= 2^1$

1 2 1 $4= 2^2$

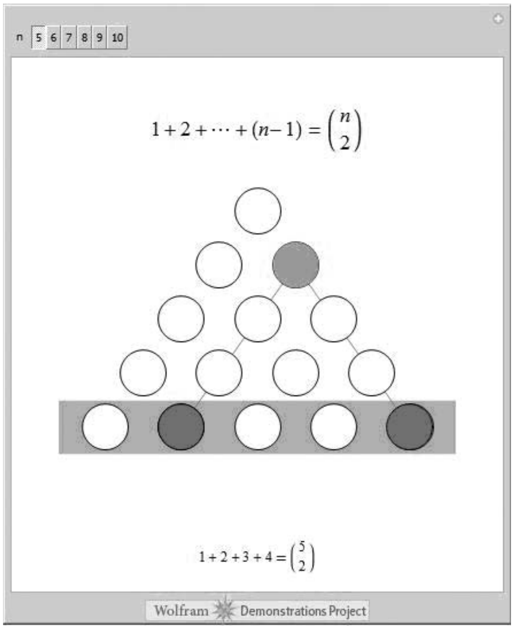
1 3 3 1 $8= 2^3$

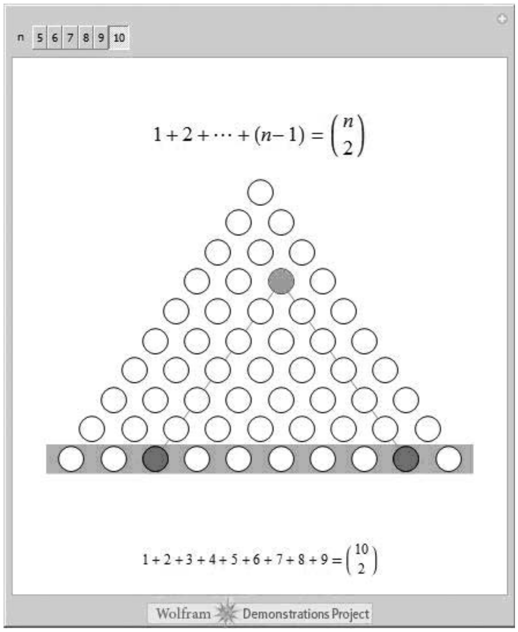
1 4 6 4 1 $16= 2^4$

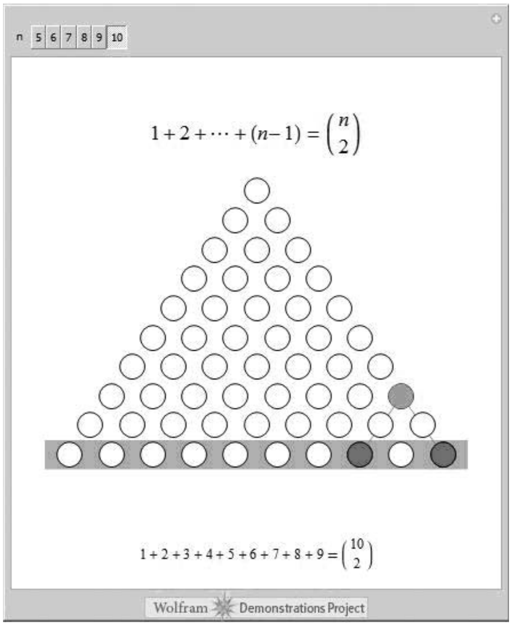
Del mismo modo, dentro de la línea de demostraciones sin palabras, se puede trabajar la cantidad de números en una disposición triangular y su relación con el número combinatorio.

Ejemplo 3

Las imágenes que se presentan a continuación se pueden visualizar en el siguiente enlace: http://demonstrations.wolfram.com/ProofWithoutWords12N1NChoose2/. El mismo corresponde al sitio The Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com/)







Mediante el cálculo combinatorio es posible profundizar las permutaciones, las variaciones y las combinaciones. Dentro del cálculo de probabilidades se retoma también la diferenciación entre sucesos incompatibles e independientes así como el estudio de la probabilidad condicional.

Ejemplo 4

100 personas afectadas por cierta enfermedad son divididas en dos grupos para su tratamiento con medicamentos A y B.

R cantidad de pacientes respondieron positivamente al tratamiento y N lo hicieron de manera negativa.

	A	B	
R	30	40	70
N	10	20	30
	40	60	100

Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad (p) de que haya sido tratada con el remedio A y su respuesta haya sido positiva?

Mediante la tabla se observa que de las 70 personas que respondieron positivamente al tratamiento, 30 recibieron atención con el medicamento A, de acuerdo con lo que indica el valor marginal. Se puede plantear entonces que:

$$P\,(A/R) = \frac{30}{70}$$

Por fórmula:

$$P\,(A/R) = \frac{P(A) \text{x}\, P(B)}{P(R)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{30}{70}$$

Orientaciones didácticas

La formación matemática en la Escuela Secundaria pretende que los estudiantes adquieran nuevas formas de pensamiento, útiles para interpretar el mundo con una mirada abierta; se busca también su disfrute a partir de las actividades matemáticas que realizan, al generar respuestas ingeniosas. Con este objetivo, el profesor ha de diseñar propuestas de trabajo de acuerdo a estos objetivos, para lo cual se presentan una serie de orientaciones didácticas.

Resolución de problemas y formalización

Existe una importante cantidad de bibliografía acerca de las características que debe tener una actividad para constituirse en un problema que puede ser resuelto por parte de los alumnos. En este Diseño Curricular se considera que un problema:

- promueve el desarrollo de estrategias que favorecen una educación más autónoma, comprometida y participativa;
- se constituye como tal a partir del vínculo que el alumno establece con la tarea propuesta, y no es una característica inherente a las actividades;
- es una situación que se le presenta al estudiante y lo moviliza a la acción;
- genera que los jóvenes pongan en juego diferentes tipos de saberes relacionados con los conceptos, los procedimientos y/o las actitudes. Si el alumno reproduce un procedimiento aprendido con anterioridad, estaría realizando un ejercicio o un problema de aplicación pero no aprendiendo a través de problemas en el sentido que entiende el presente Diseño.

La institucionalización de los conocimientos comienza con los estudiantes cuando el docente legitima sus procesos y, junto a ellos, generaliza, enmarca en una teoría y descontextualiza el saber aprendido.

Clima de la clase y tratamiento del error

Los docentes desean que los alumnos se comprometan con su propio aprendizaje; esto se logra cuando desarrollan tareas de las que deciden hacerse cargo. En las clases de Matemática, las largas exposiciones suelen contar con pocos seguidores, aún cuando el grupo aparente lo contrario.

Educar matemáticamente no consiste en enseñar a partir de exposiciones teóricas, para luego solicitar a los alumnos la resolución de ejercicios y problemas. Para que ellos tomen un rol activo, es necesario generar un clima de confianza en su propia capacidad y de respeto por la producción grupal.

Resulta conveniente planificar la tarea en el aula, de modo tal que algunas veces haya una primera instancia de trabajo individual. En esta etapa el estudiante preparará su aporte personal para la posterior labor grupal.

Hacia el interior de los equipos, cada integrante compartirá su producción con los demás; y entre todos construirán la forma de comunicarla a los restantes grupos con un registro adecuado que permita confrontar las diferentes resoluciones. En este momento es importante que el docente habilite la palabra de todos los alumnos.

Una vez que finalice la puesta en común y la discusión acerca de cada solución que los alumnos planteen, el docente establecerá el estatus matemático de estas construcciones. Los errores que se produzcan en este proceso serán indicadores del estado del saber de los estudiantes, y el docente contribuirá para avanzar a partir de ellos.

La superación de errores se logrará si los alumnos toman conciencia acerca de los mismos y se hacen cargo de su reparación en niveles crecientes de autonomía. Dar la respuesta correcta no significa enmendar un error, más aún deberá estimularse al estudiante para que elabore estrategias de control que le permitan decidir sobre la corrección de sus producciones.

Leer y escribir en Matemática-Ciclo Superior

Comprender un texto supone dar significado a lo leído e incluirlo en el marco personal de significaciones previas, enriqueciéndolas. En Matemática-Ciclo Superior este proceso debe ser correcto en términos de la ciencia y la cultura matemática. Palabras como dependencia o semejanza tienen significados diferentes en distintos contextos, pero en esta disciplina su definición es precisa. Por este motivo, la lectura de textos matemáticos ha de estar presente en las clases.

Entre otras actividades, leer matemática significa interpretar las cuestiones vinculadas al área que están presentes en textos de otras disciplinas; analizar cómo se utilizan los modelos matemáticos para describir y predecir fenómenos de las ciencias naturales o sociales, los procesos tecnológicos o las expresiones artísticas. Con esta finalidad, durante las clases será necesario proponer el análisis, comentario y discusión de materiales propios de la ciencia, así como textos de otras disciplinas donde el lenguaje matemático está presente a través de gráficos, porcentajes o esquemas geométricos.

Los alumnos podrán trabajar a partir de las producciones de sus compañeros; las mismas serán un material rico sobre el cual iniciar la lectura de textos con el propósito de explicar, describir, argumentar, validar, dar precisión y complejizar la información con la que se cuente.

Para promover el desarrollo de la capacidad lectora de los alumnos, es esperable que durante las clases los estudiantes se enfrenten a una diversidad de textos que incluyan expresiones verbales, simbólicas y gráficas. Es importante que puedan analizarlas y favorecer el pasaje a otras formas más complejas.

En el proceso de construcción de sentido de un lenguaje científico se produce una paradoja: por un lado, los objetos matemáticos deberían preceder a su representación, pero es a partir de ella que se conceptualizan semióticamente. Estas representaciones semióticas son necesarias para una comunicación más precisa, e imprescindibles para la construcción futura del concepto.

Para facilitar este proceso, será necesario promover la producción y la lectura de textos que permitan su representación a partir de diversos lenguajes –desde el natural o coloquial hasta el simbólico–, teniendo en cuenta que esto supera la simple traducción y adquiere riqueza y precisión mediante la relectura de las conceptualizaciones.

Uso de la calculadora

La calculadora, y algunos software específicos, son herramientas al alcance de los alumnos y de empleo cotidiano en la sociedad. En este Diseño Curricular su uso estará presente en todos los ejes y núcleos sintéticos de contenidos, ya que permitirá mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas. Al utilizar estas herramientas, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.

La calculadora, contrariamente a lo esperado o intuido, es un potentísimo instrumento de cálculo; es motivadora, despierta el interés de los alumnos en la búsqueda de regularidades o bien genera interrogantes –por ejemplo, en el caso de obtener por multiplicación números más pequeños–. Por otra parte, constituye una herramienta de control neutral, ya que el alumno puede utilizarla para verificar las estimaciones que realice sin percibir reprobación ni crítica ante las respuestas equivocadas.

Su uso se hace imprescindible en un momento en que el cálculo algorítmico dio lugar a nuevas formas de pensar en la educación matemática. Según Nicholas Burbules, “las nuevas tecnologías son herramientas demasiado valiosas como para dejarlas fuera del aula. El imperativo es encontrar la conexión entre aquello que los jóvenes se sienten motivados a hacer y aquello que como educadores consideramos que tienen que aprender”.[5]

[5] Burbules Nicholas, “Los problemas no se solucionan con prohibir las TIC, simulando que no existen. Las nuevas tecnologías son herramientas demasiado valiosas como para dejarlas fuera del aula”, en Educ.ar. Buenos Aires, 2009. [http://portal.educ.ar/noticias/entrevistas/nicholas-burbules-los-problema.php]

Orientaciones para la evaluación

La evaluación en Matemática-Ciclo Superior se debe entender como un proceso continuo que involucra todas las actividades que el docente propone a sus alumnos; no está únicamente asociada a la calificación que surge de las evaluaciones escritas, en las cuales sólo se involucra la memorización de enunciados o la aplicación mecánica de reglas.

En una prueba escrita el alumno resuelve problemas que el docente corrige. Esta corrección deberá considerar tanto la resolución del problema en su totalidad como el pertinente uso de las herramientas matemáticas. Esto implica evaluar que el estudiante, una vez realizada la operatoria necesaria, sea capaz de contextualizar los resultados obtenidos para construir respuestas coherentes a la situación planteada.

Supone también la capacidad de explicar y justificar los procedimientos elegidos para la resolución de un problema, mediante el uso del lenguaje matemático en sus diferentes variantes (coloquial, gráfico, simbólico) y la producción de un registro que permita comunicar los resultados de manera eficaz.

En estas condiciones, la evaluación es un proceso que brinda a docentes y alumnos elementos para conocer el estado de situación de la tarea que realizan juntos; como tal, representa una oportunidad de diálogo entre ambos. De este modo, la devolución de las evaluaciones escritas debe prever breves momentos de atención personalizada a los estudiantes, que complementen los comentarios que el docente realiza en los exámenes cuando los corrige. A su vez, los resultados observados en la corrección permiten al docente reorientar el proceso de enseñanza y planificar la tarea futura.

Es importante que los alumnos conozcan con claridad qué es lo que se espera que logren en relación con el contenido que se evalúa. Por lo general, la calificación final de una prueba sólo es reflejo de la distancia entre lo que se espera que ellos logren y lo efectivamente alcanzado, pero en ocasiones es difícil para los estudiantes darse cuenta de lo que el profesor considera importante a la hora de corregir. Por esto es indispensable que el docente explicite este tipo de cuestiones aunque las considere triviales.

Es importante también que se evalúe cuáles son los progresos de los jóvenes en relación con los conocimientos matemáticos evaluados y se les informe sobre lo que se espera que mejoren; esto contribuye a la construcción del oficio de alumno de Matemática. En este sentido, el docente debe llevar registros personalizados de los progresos de los estudiantes y considerar, como un punto más a la hora de calificar, la distancia entre sus construcciones y los saberes matemáticos.

Cuando el docente califique a los alumnos, además de ponderar el estado de situación de cada uno de ellos, debe tener en cuenta el propio proceso de enseñanza de la materia y contemplar la distancia entre lo planificado y lo efectivamente realizado.

Bibliografía

Alsina, Claudi, *Geometría para turistas.* Barcelona, Ariel, 2009.

– – –, *Vitaminas matemáticas*. Barcelona, Ariel, 2009.

Barbin, Evelyne y Douady, Regine (dir.), *Enseñanza de las matemáticas: relación entre saberes, programas y práctica*. IREM, Paris Topics Editions, 1996.

Batanero, Carmen y Godino, Juan, *Estocástica y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2002.

Batanero, Carmen y Godino, Juan, *Razonamiento combinatorio*. Madrid, Síntesis, 1994.

Berlinski, David, *Ascenso infinito. Breve historia de las matemáticas*. Buenos Aires, Debate, 2006.

Berté, Annie, *Matemática de EGB 3 al Polimodal*. Buenos Aires, A-Z Editora, 1999.

– – –, *Matemática Dinámica*. Buenos Aires, A-Z Editora, 1999.

Bishop, Alan, *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Buenos Aires, Paidós, 1999.

Burbules, Nicholas, *Educación: riesgos y promesas de las nuevas tecnologías de la información*. España, Granica, 2001.

Chevallard, Yves, *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Aique, 1997.

– – –; Bosch, Marianna y Gascón, Joseph, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, ICE/ Horsori, 1997.

Corbalan, Fernando, *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona, Grao, 1998.

D´Amore, Bruno, *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México, Editorial Reverté, 2006.

– – –, *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Barcelona, Revista Uno nº35, 2004.

– – –, *La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2002.

– – –, *La didáctica de la Matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses*. México, Revista Educación Matemática nº 12, 2000.

de Guzmán, Miguel, *Aventuras matemáticas.* Madrid, Pirámide, 1997.

Del Valle de Rendo, Alicia y Vega, Viviana, *Una escuela en y para la diversidad*. Buenos Aires, Aique, 2006.

Fischbein, Efraim, *The evolution with age of probabilistics, intuitively based misconceptions*. Journal of research in Mathematical Education, NCTM, 1997.

– – – y Vergnaud, Gérard, *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna, Pitagora Editrice, 1992.

Gardner, Howard, *La mente no escolarizada*. Buenos Aires, Paidós, 2008.

Ghersi, Italo, *Matematica Dilettevole e curiosa*. Milano, Ulrico Hoeplie Edittore, 1978.

Gvirtz, Silvina y De Podestá, María Eugenia (comp.), *Mejorar la escuela. Acerca de la gestión y la enseñanza.* Buenos Aires, Granica, 2004.

Imbernón, Francisco (coord.), *La educación en el siglo XXI. Los ritos del futuro inmediato*. Barcelona, Graó, 2000.

Klimovsky, Gregorio, *Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología*. Buenos Aires, AZ editora. 1994.

Larson, Ron, Hostetler, Robert y Edwards, Bruce, *Cálculo I*. México, McGraw-Hill, 2006.

Litwin, Edith (comp.), *Tecnología Educativa*. Buenos Aires, Paidós, 1995.

Medina Rivilla, Antonio y Mata, Francisco Salvador, *Didáctica General*. Madrid, Prentice may, 2003.

Meirieu, Philippe, *La opción de educar*. Barcelona, Octaedro, 2001.
Nelsen, Roger, *Proofs without words II: more exercises in visual thinking*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 2001.
Odifreddi, Piergiorgio, *La Matemática del siglo XX. De los conjuntos a la complejidad*. Buenos Aires, Katz, 2006.
Ortega, Tomás, *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona, Grao, 2005.
Panizza, Mabel, *Razonar y conocer*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Parra, Cecilia y Saiz, Irma (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós Educador, 1994.
Plagia, Humberto, Bressan, Ana y Sadosky, Patricia, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Rancière, Jaques, *El maestro ignorante*. Barcelona, Laertes, 2003.
Uno, "Evaluación en Matemática", en *Revista Uno* nº 11. Barcelona, Graó, 1997.
— — —, "La gestión de la clase de Matemática", en *Revista Uno* nº 16. Barcelona, Graó, 1997.
Rico, Luis (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, ICE/ Horsori, 1997.
Sadosky, Patricia, *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Sessa, Carmen, *Iniciación al estudio didáctico del Algebra*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Vergnaud, Gèrard, *Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de nuevo?* Buenos Aires, Edicial, 1997.
Wolton, Dominique, *Internet y después*. Barcelona, Gedisa, 2000.

Recursos en Internet

Dialnet, http://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=219055
Dirección General de Cultura y Educación, http://abc.gov.ar
Educ.ar, el portal educativo del Estado argentino, http://www.educ.ar/educar/
Geometría y algo más, http://www.unlu.edu.ar/~dcb/matemat/geometa1
Organización de Estados Iberoamericanos, Para la Educación, la Ciencia y la Cultura, http://www.campus-oei.org/oeivirt/edumat.htm
Redemat.com, recursos de matemáticas en Internet, http://www.recursosmatematicos.com/
Sector Matemática, artículos, http://www.sectormatematica.cl/articulos
Sector Matemática, revistas, http://www.sectormatematica.cl/revistas.htm
Sitio Web de Nicholas C. Burbules, http://faculty.ed.uiuc.edu/burbules/
Universidad de Granada, http://www.ugr.es/local/jgodino
Wolfram MathWorld, built with Mathematica Technology, http://mathworld.wolfram.com/ProofwithoutWords.html